Mathematik I

Vorlesungsskript

Fleurianne Bertrand

Wintersemester 2026/27

Einleitung

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.

Ziel der Vorlesung

Sie lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und mit geeigneten Methoden zu untersuchen.

1 Grundlagen

1.1 Elemente der Aussagenlogik

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann. Sprechweisen

- „p ist eine wahre (richtige) Aussage.“, „p gilt.“
- „p ist eine falsche Aussage.“, „p gilt nicht.“

Insbesondere kann keine Aussage gleichzeitig wahr und falsch sein.

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.
Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“:
Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen. Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q“; „Wenn p gilt, so gilt q.“),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.“).

Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn man aus **wahren** Aussagen die **falschen** Schlüsse zieht (p wahr, q falsch). Eine Äquivalenz bedeutet, dass p und q immer den gleichen Wahrheitswert besitzen. Alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

Satz 1.1. *Seien p und q Aussagen. Dann gilt:*

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Die zweite Aussage bildet die Grundlage für das indirekte Beweisen
(„Angenommen q gilt nicht, dann kann auch p nicht gelten.“).

Satz 1.2. *Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:*

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *und* $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *und* $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(Assoziativgesetze),*
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *und* $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(Distributivgesetze),*
- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ *und* $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ *(De Morgansche Regeln).*

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung aller freien Variablen durch Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\exists$ – „es existiert mindestens ein ... mit ...“
- $\forall$ – „für alle ... gilt ...“

Definition 1.3. Sei $p(x)$ eine Aussageform; dann meinen wir mit

- der Negation von „Für alle x gilt $p(x)$“ die Aussage „Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt“; symbolisch:
$$\overline{\forall x : p(x)} := (\exists x : \overline{p(x)})$$
- der Negation von „Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt“ die Aussage „Für alle x gilt $p(x)$ nicht“; symbolisch:
$$\overline{\exists x : p(x)} := (\forall x : \overline{p(x)})$$

Gerüstet mit diesen Vorkenntnissen lassen sich die gebräuchlichen Sprachkonstrukte der Mathematik grob typisieren:

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt.

Wichtige Eigenschaften von Axiomensystemen sind Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit.[1]

Ein Satz ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt wurde. Den Beweis bildet dabei eine Kette von Schlussfolgerungen, die nur von Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen ausgeht.

Beispiel: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.“

Gebräuchliche Ausprägungen von Sätzen sind auch

- Lemma (Hilfssatz) – ein Satz, der als Zwischenstufe in einem Beweis dient,
- Korollar (Folgerung) – ein Satz, der ohne großen Beweisaufwand aus einem anderen folgt.

Die Abgrenzung zum Satz ist jeweils fließend und subjektiv.

Eine Definition dient zur Festlegung eines mathematischen Begriffs. Hier sind eher Wertungen wie „sinnvoll/nicht sinnvoll“ statt „wahr/falsch“ angebracht. Sinnvolle Definitionen erfüllen unter anderem folgende Anforderungen:

- Widerspruchsfreiheit,
- Zirkelfreiheit (das zu Definierende darf nicht selbst Bestandteil der Definition sein),
- Angemessenheit (nicht zu eng und nicht zu weit gefasst),
- Redundanzfreiheit (keine Bestandteile enthalten, die aus anderen logisch folgen).

Häufig schreibt man Definitionen in der Form von Gleichungen oder Äquivalenzen und verwendet die Symbole $:=$ und $:\Leftrightarrow$. Der zu definierende Ausdruck steht immer auf der Seite des Doppelpunkts.
Beispiel: $a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

[1] vgl. D. Hofstadter: *Gödel, Escher Bach.* Basic Books, New York NY 1979