Mathematik I

Für die Studiengänge Informatik, Elektrotechnik, Maschinenbau und Physik

Fleurianne Bertrand



Technische Universität Chemnitz

Wintersemester 2026/27



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Mathematik I

Für die Studiengänge Informatik, Elektrotechnik, Maschinenbau und Physik

Fleurianne Bertrand



Technische Universität Chemnitz

Wintersemester 2026/27



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Organisation

- **Vorlesung:** zweimal pro Woche
- **Übung:** Vertiefung und Anwendung des Vorlesungsstoffs
- **OPAL:**
  - Vorlesungsmaterialien und Übungsblätter
  - elektronische Übungen und Tests
  - Lernstandserhebung zu Semesterbeginn
  - aktuelle Hinweise und Termine
- **Prüfungszulassung:** Teilnahme an den vorgesehenen elektronischen Tests
- **Klausur**

Wichtig

Bitte schreiben Sie sich in OPAL in Ihre Übungsgruppe und in „Alle Teilnehmenden“ ein und abonnieren Sie den Kurskalender.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.



Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.



Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

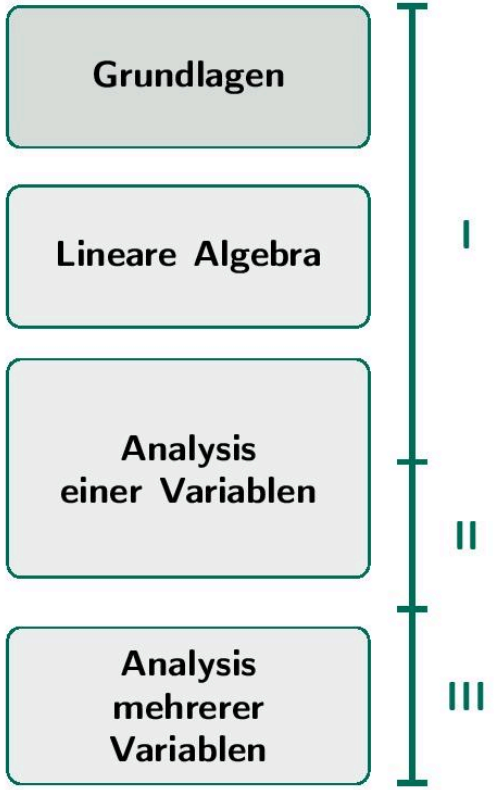
- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.



Ziel der Vorlesung

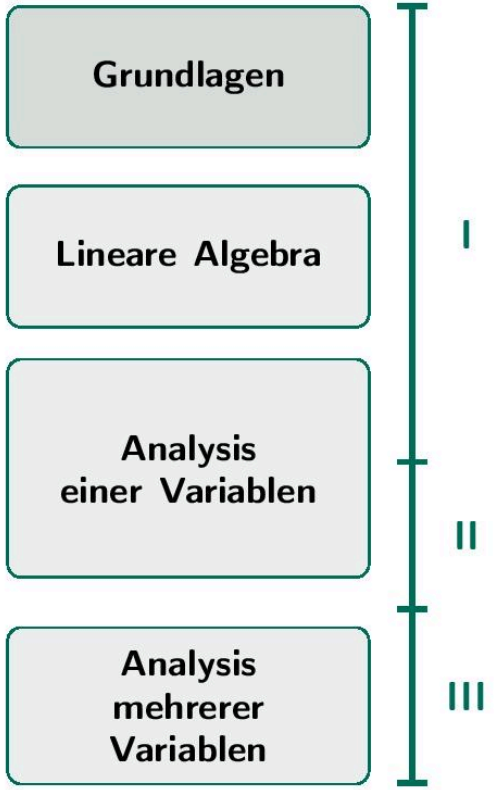
Sie lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und mit geeigneten Methoden zu untersuchen.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.



Ziel der Vorlesung

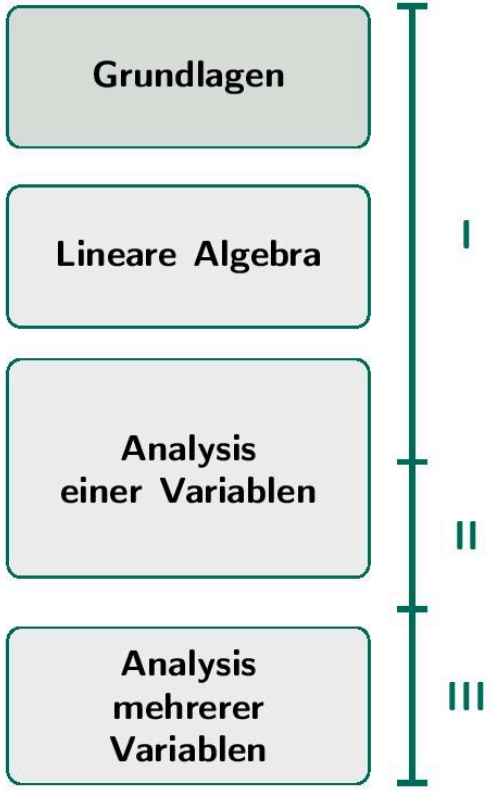
Sie lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und mit geeigneten Methoden zu untersuchen.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.



Ziel der Vorlesung

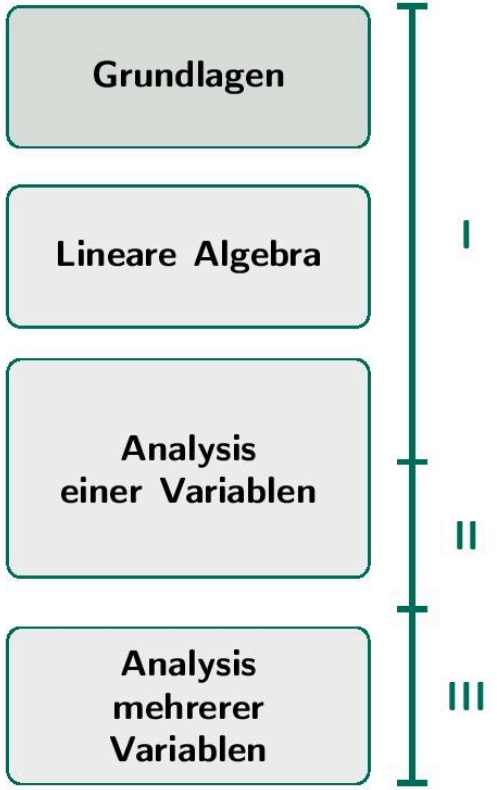
Sie lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und mit geeigneten Methoden zu untersuchen.

Höhere Mathematik

- Der Begriff Mathematik stammt aus dem Altgriechischen:

  mathēmatikē téchnē, „Kunst des Lernens“.

- Für die Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition.
- Viele konkrete Probleme haben aber eine abstrakte Struktur, die sich mathematisch untersuchen lässt.
- Abstraktion macht Mathematik übertragbar: Wir lösen ein mathematisches Problem und können das Ergebnis überall verwenden, wo diese Struktur vorkommt.



Ziel der Vorlesung

Sie lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und mit geeigneten Methoden zu untersuchen.

Inhalt

1. Grundlagen
2. Lineare Algebra
3. Folgen und Reihen



Was meinen wir eigentlich genau?



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

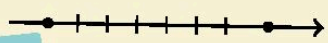


Gibt es die leere Menge?

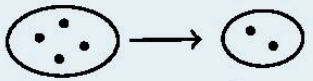
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



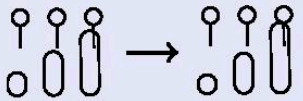
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

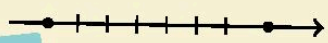


Gibt es die leere Menge?

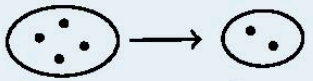
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



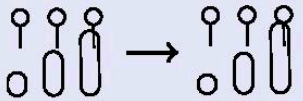
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

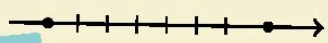


Gibt es die leere Menge?

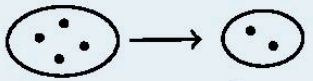
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



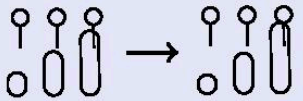
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

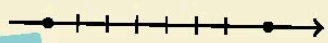


Gibt es die leere Menge?

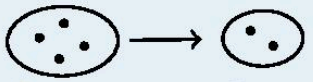
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



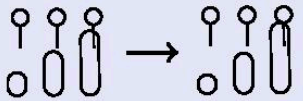
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

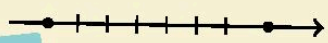


Gibt es die leere Menge?

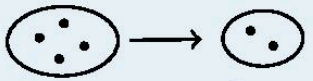
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



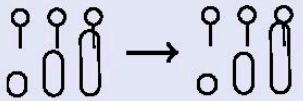
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

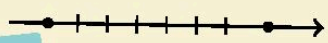


Gibt es die leere Menge?

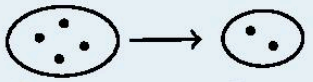
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



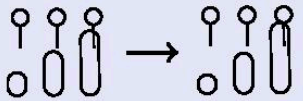
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

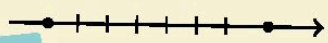


Gibt es die leere Menge?

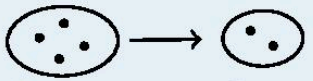
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



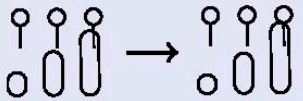
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Was meinen wir eigentlich genau?

Was ist eine natürliche Zahl?

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Was ist ein Punkt?



Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade?

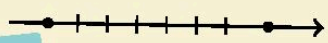


Gibt es die leere Menge?

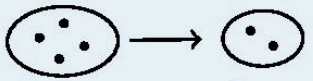
$\emptyset$

„Dieser Satz ist falsch.“

Je größer der Abstand zwischen zwei Zahlen ist, desto mehr Zahlen liegen dazwischen.



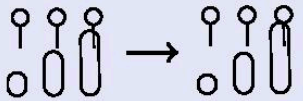
Wenn man Elemente aus einer Menge entfernt, bleiben weniger Elemente übrig.



Eine Kreisscheibe lässt sich durch Zerschneiden, Verschieben und Drehen nicht zu zwei Kreisscheiben derselben Größe verdoppeln.



Wenn eine Person die Abteilung wechselt, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, kann das Durchschnittsgehalt nicht in beiden Abteilungen steigen.



Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Elemente der Aussagenlogik

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip als Beispiel

1.2 Elemente der Mengenlehre

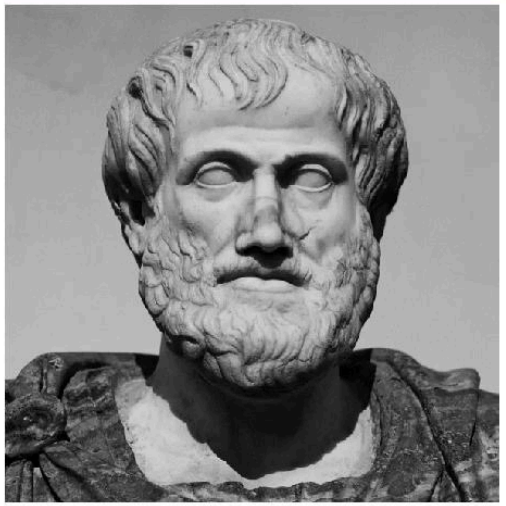
1.3 Die reellen Zahlen

1.4 Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

1.5 Abbildungen und Funktionen

1.6 Komplexe Zahlen

Aristoteles (384–322 v. Chr.)

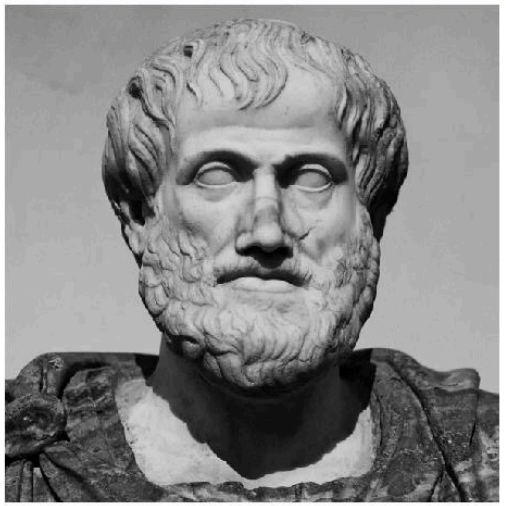


Elemente der Aussagenlogik

Aussagen

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Aristoteles (384–322 v. Chr.)



Elemente der Aussagenlogik

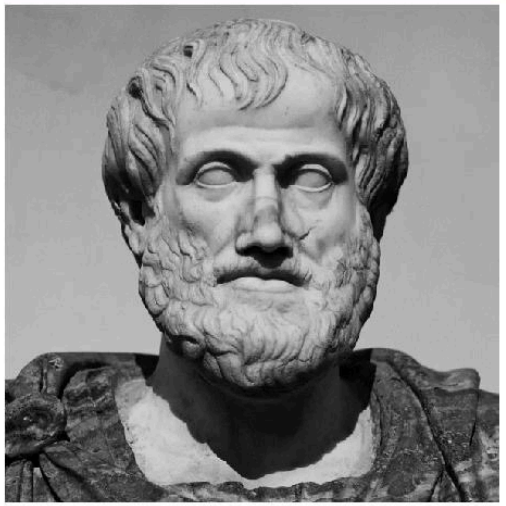
Aussagen

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Sprechweisen

- „p ist eine wahre (richtige) Aussage.“, „p gilt.“
- „p ist eine falsche Aussage.“, „p gilt nicht.“

Aristoteles (384–322 v. Chr.)



Elemente der Aussagenlogik

Aussagen

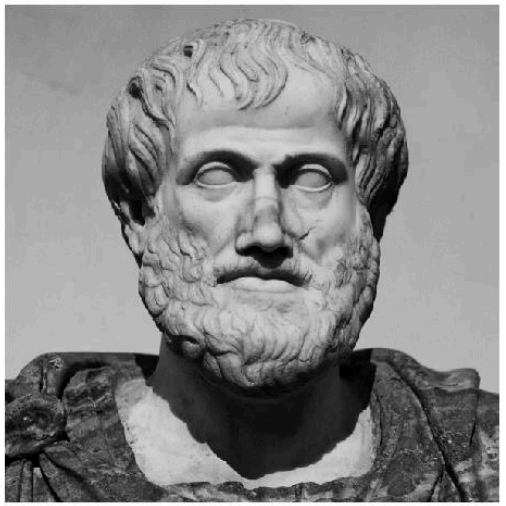
Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Sprechweisen

- „p ist eine wahre (richtige) Aussage.“, „p gilt.“
- „p ist eine falsche Aussage.“, „p gilt nicht.“

Insbesondere kann keine Aussage gleichzeitig wahr und falsch sein.

Aristoteles (384–322 v. Chr.)



Elemente der Aussagenlogik

Aussagen

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Sprechweisen

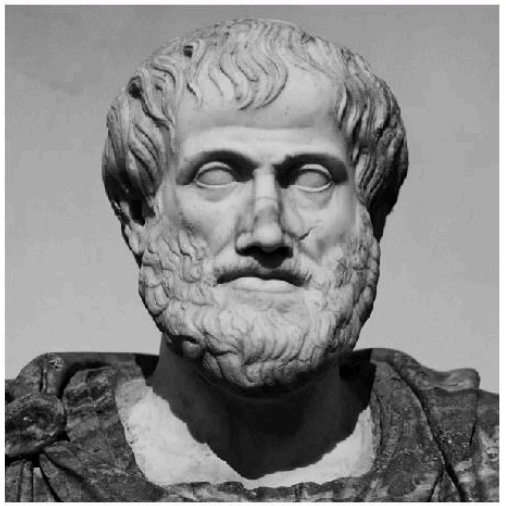
- „p ist eine wahre (richtige) Aussage.“, „p gilt.“
- „p ist eine falsche Aussage.“, „p gilt nicht.“

Insbesondere kann keine Aussage gleichzeitig wahr und falsch sein.

Sind folgende Konstrukte Aussagen? Was ist ggf. ihr Wahrheitswert?

„Wir sprechen gerade über Aussagenlogik.“;
„Wie soll ich bloß die Prüfung schaffen?“;
„$6^2 = 36$“;
„$7 = \sqrt{48}$“;
„$\sqrt{14}$“;

Aristoteles (384–322 v. Chr.)



Elemente der Aussagenlogik

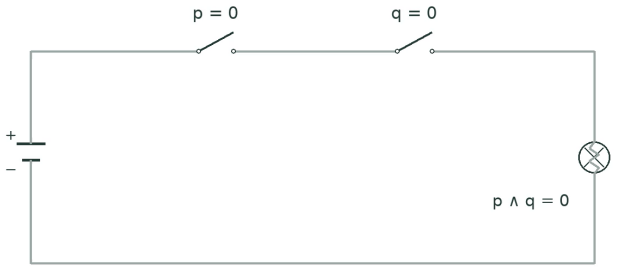
Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:



p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“:
Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!

Elemente der Aussagenlogik

Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

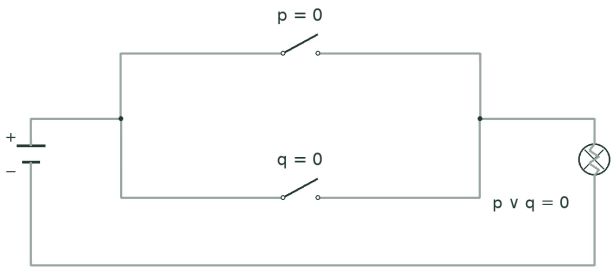
Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f



Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“:
Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!

Elemente der Aussagenlogik

Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f



Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“:
Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!

Elemente der Aussagenlogik

Geben Sie den Wahrheitswert der Aussage

„Wir gehen heute Abend ins Kino oder ins Theater“

in Abhängigkeit von der tatsächlich durchgeführten Aktivitäten an.
Machen Sie sich den Unterschied zur Umgangssprache klar.



Geben Sie die Wahrheitswerte und Negationen zu folgenden Aussagen an:

- p: „Unsere Vorlesung findet heute am Nachmittag statt.“
- q: „Unsere Vorlesung findet heute am Abend statt.“

Warum ist q nicht die Negation von p?

Elemente der Aussagenlogik

Implikation und Äquivalenz

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen.

Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q“; „Wenn p gilt, so gilt q.“),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.“).

Elemente der Aussagenlogik

Implikation und Äquivalenz

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen.

Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q“; „Wenn p gilt, so gilt q.“),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.“).

Megarischer Streit

Philon von Megara (um 300 v. Chr.)
„Wenn p, dann q“ ist nur falsch, wenn Wahres zu Falschem führt. Das ist genau unsere Tabelle.

Diodoros Kronos
Zwischen p und q müsse ein echter Zusammenhang bestehen.



Elemente der Aussagenlogik

Implikation und Äquivalenz

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen.

Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q“; „Wenn p gilt, so gilt q.“),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.“).

Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn man aus **wahren** Aussagen die **falschen** Schlüsse zieht (p wahr, q falsch).

Eine Äquivalenz bedeutet, dass p und q immer den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Megarischer Streit

Philon von Megara (um 300 v. Chr.)
„Wenn p, dann q“ ist nur falsch, wenn Wahres zu Falschem führt. Das ist genau unsere Tabelle.

Diodoros Kronos
Zwischen p und q müsse ein echter Zusammenhang bestehen.



Elemente der Aussagenlogik

Implikation und Äquivalenz

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüpfungen.

Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q“; „Wenn p gilt, so gilt q.“),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.“).

Die zugehörige Wahrheitswerttabelle spielt für den Praktiker kaum eine Rolle – die sprachliche Fassung der Begriffe ist handlicher:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Megarischer Streit

Philon von Megara (um 300 v. Chr.)
„Wenn p, dann q“ ist nur falsch, wenn Wahres zu Falschem führt. Das ist genau unsere Tabelle.

Diodoros Kronos
Zwischen p und q müsse ein echter Zusammenhang bestehen.



Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“



Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

und folgender Satz:

Satz 1.1

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

und folgender Satz:

Satz 1.1

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Die zweite Aussage bildet die Grundlage für das indirekte Beweisen („Angenommen q gilt nicht, dann kann auch p nicht gelten.“).

Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

und folgender Satz:

Satz 1.1

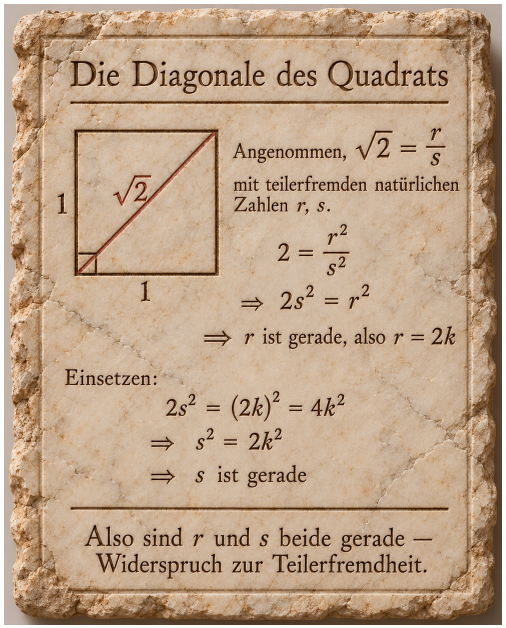
Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Die zweite Aussage bildet die Grundlage für das indirekte Beweisen („Angenommen q gilt nicht, dann kann auch p nicht gelten.“).

Interpretieren Sie die Aussage „Wenn n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.“

Ein antiker Beweistrick



Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder „q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

und folgender Satz:

Satz 1.1

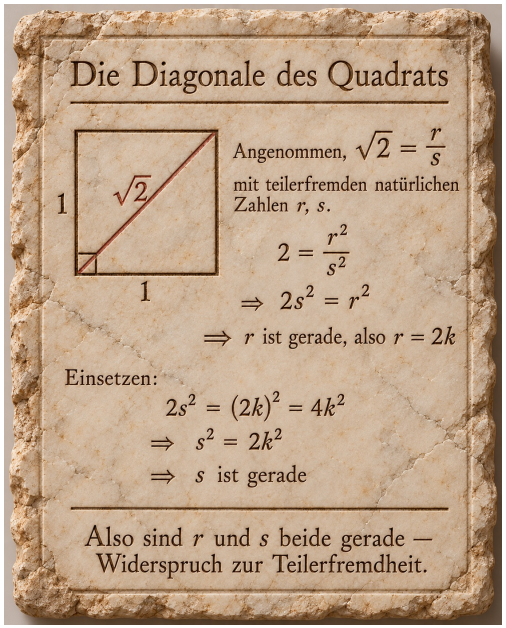
Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Die zweite Aussage bildet die Grundlage für das indirekte Beweisen („Angenommen q gilt nicht, dann kann auch p nicht gelten.“).

Interpretieren Sie die Aussage „Wenn n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.“

Ein antiker Beweistrick

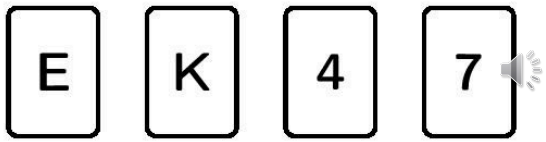


Elemente der Aussagenlogik

Experiment: Karten

Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben, auf der anderen eine Zahl.
Regel: „**Wenn** vorne ein Vokal steht, **dann** steht hinten eine gerade Zahl.“

Welche Karten müssen Sie umdrehen, um die Regel zu prüfen?

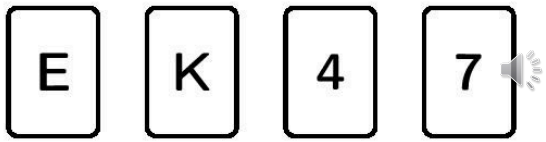


Elemente der Aussagenlogik

Experiment: Karten

Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben, auf der anderen eine Zahl.
Regel: „**Wenn** vorne ein Vokal steht, **dann** steht hinten eine gerade Zahl.“

Welche Karten müssen Sie umdrehen, um die Regel zu prüfen?

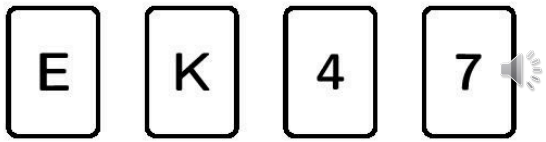


Elemente der Aussagenlogik

Experiment: Karten

Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben, auf der anderen eine Zahl.
Regel: „**Wenn** vorne ein Vokal steht, **dann** steht hinten eine gerade Zahl.“

Welche Karten müssen Sie umdrehen, um die Regel zu prüfen?



Antwort: E und 7. Die meisten wählen E und 4 – aber hinter der 4 darf stehen, was es will. Die 7 muss man prüfen, denn nach Satz 1.1 gilt: „ungerade $\Rightarrow$ kein Vokal“.

Denkpsychologie

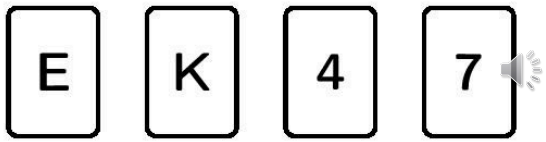
Peter C. Wason (1966)
Nur rund 10 % der Versuchspersonen lösen die Kartenaufgabe richtig – auch Studierende der Mathematik.

Elemente der Aussagenlogik

Experiment: Karten

Jede Karte hat auf einer Seite einen Buchstaben, auf der anderen eine Zahl.
Regel: „**Wenn** vorne ein Vokal steht, **dann** steht hinten eine gerade Zahl."

Welche Karten müssen Sie umdrehen, um die Regel zu prüfen?



Antwort: E und 7. Die meisten wählen E und 4 – aber hinter der 4 darf stehen, was es will. Die 7 muss man prüfen, denn nach Satz 1.1 gilt: „ungerade $\Rightarrow$ kein Vokal".

Dieselbe Logik: „Wer Bier trinkt, muss mindestens 18 sein."

Bier	Cola	25 Jahre	16 Jahre

Denkpsychologie

Peter C. Wason (1966)
Nur rund 10 % der Versuchspersonen lösen die Kartenaufgabe richtig – auch Studierende der Mathematik.

Griggs, Cox (1982)
Mit der Bier-Variante lösen die meisten sie sofort.

Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*

selbstverständlich?



L. E. J. Brouwer
(1881–1966)

Intuitionismus

Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*

selbstverständlich?



L. E. J. Brouwer
(1881–1966)

Intuitionismus

Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*

Alltagsbeispiel

"Es regnet und es ist kalt."

$\Longleftrightarrow$

"Es ist kalt und es regnet."

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	f	f

Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(Assoziativgesetze),*

George Boole (1815–1864)

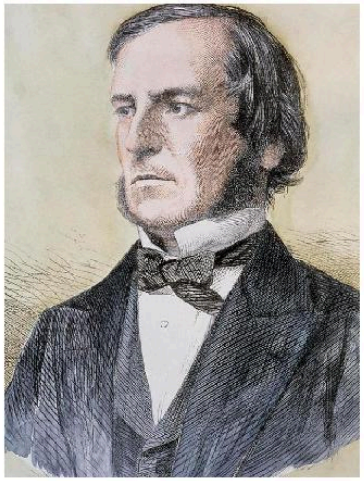


Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(Assoziativgesetze),*
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(Distributivgesetze),*

George Boole (1815–1864)



"Ich fahre mit dem Fahrrad und zwar heute oder morgen."

$\Longleftrightarrow$

"Ich fahre heute mit dem Fahrrad oder ich fahre morgen mit dem Fahrrad."

Satz 1.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
  $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(Assoziativgesetze),*
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(Distributivgesetze),*
- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
  $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ *(De Morgansche Regeln).*

Augustus De Morgan (1806–1871)



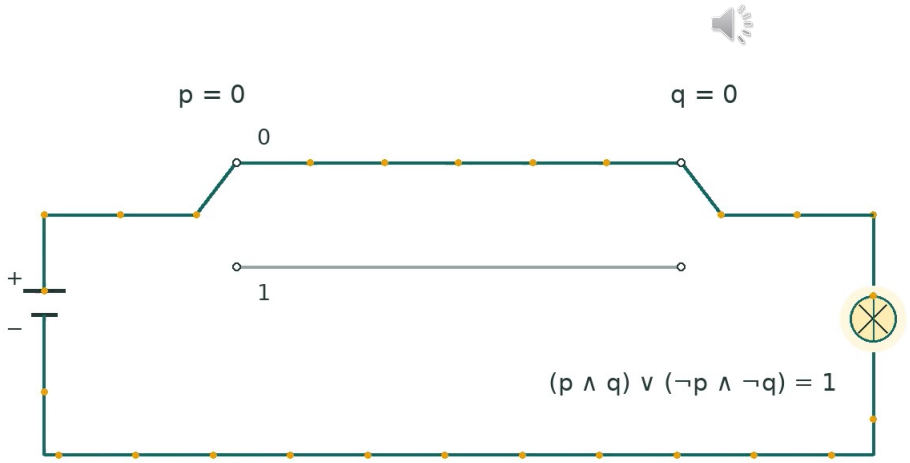
"Es stimmt nicht, dass es regnet und kalt ist." $\Leftrightarrow$ "Es regnet nicht oder es ist nicht kalt."

Elemente der Aussagenlogik

Exkurs: Anwendung in der Digitaltechnik

In der Digitaltechnik gibt es genau zwei Zustände (hohe/niedrige(keine) Spannung; 1/0), die man als logisches „wahr“ bzw. „falsch“ interpretiert.

Schaltungen bestehen häufig aus „Logikgattern“ (engl. *gates*).
Diese besitzen z. B. 2 Eingänge (A,B) und einen Ausgang (Y) und reproduzieren logische Verknüpfungen.



Von Boole zum Chip

C. S. Peirce (1886)
schreibt in einem Brief, logische Verknüpfungen ließen sich mit elektrischen Schaltungen bauen. Er wusste auch: Ein einziges Gatter (NOR bzw. NAND) genügt für alle anderen.

Claude Shannon (1937)
zeigt in seiner Masterarbeit: Boolesche Algebra beschreibt Relaisschaltungen exakt.

Konrad Zuse (1941)
Die Z3 in Berlin rechnet binär mit rund 2600 Relais.

Beispiel mit ganzen Zahlen

3 ist gerade. falsch
4 ist gerade. wahr

_____ ist gerade.

Erst durch Einsetzen einer Zahl entsteht eine Aussage.

Gottlob Frege
(1848–1925)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Gottlob Frege (1848–1925)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Gottlob Frege (1848–1925)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Mit $p(x)$ sei die Aussageform $x \leq 1$ bezeichnet, wobei x eine reelle Variable sei. Wie lauten die Aussagen $p(0)$ und $p(4)$, und was ist ihr Wahrheitswert?

Gottlob Frege (1848–1925)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

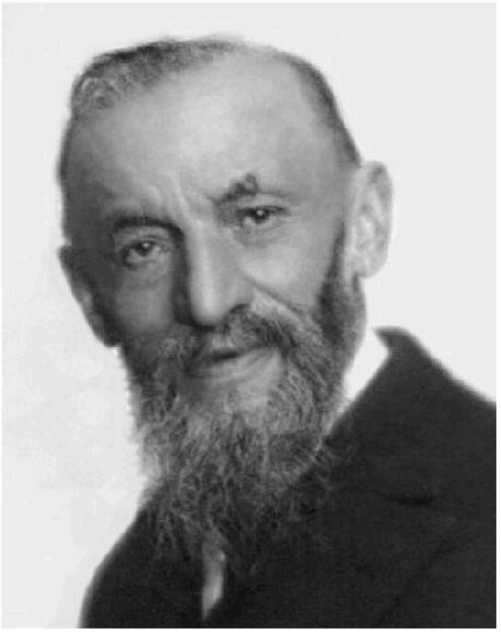
Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung aller freien Variablen durch Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\exists$ – „es existiert mindestens ein ... mit ...“

Giuseppe Peano (1858–1932)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung aller freien Variablen durch Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\exists$ – „es existiert mindestens ein ... mit ...“
- $\forall$ – „für alle ... gilt ...“

Gerhard Gentzen (1909–1945)



Elemente der Logik

Aussageformen, Quantoren

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren freien Variablen, der durch Einsetzen zulässiger Werte für alle diese Variablen zu einer Aussage wird.

Schreibweise: $p(x)$, falls x die freie Variable ist.

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung aller freien Variablen durch Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\exists$ – „es existiert mindestens ein ... mit ...“
- $\forall$ – „für alle ... gilt ...“

Sind die folgenden Aussagen wahr?
„Für alle reellen Zahlen x gilt $x > 1$.“
„Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.“

Gerhard Gentzen (1909–1945)



Definition 1.3

Sei $p(x)$ eine Aussageform; dann meinen wir mit

- der Negation von „Für alle x gilt $p(x)$“ die Aussage „Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt“; symbolisch:

$$\overline{\forall x : p(x)} := (\exists x : \overline{p(x)})$$

- der Negation von „Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt“ die Aussage „Für alle x gilt $p(x)$ nicht“; symbolisch:

$$\overline{\exists x : p(x)} := (\forall x : \overline{p(x)})$$

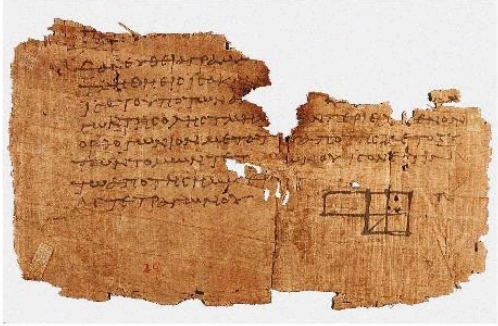
Formulieren Sie die Negationen von “Für alle reellen Zahlen x gilt $x > 1$.“, “Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.“, “Jeder Haushalt gibt ein Drittel seines Einkommens für Wohnen aus.“ (SZ, 8.9.12) und “Alle Politiker lügen gelegentlich.“

Elemente der Aussagenlogik

Axiome und Sätze

Gerüstet mit diesen Vorkenntnissen lassen sich die gebräuchlichen Sprachkonstrukte der Mathematik grob typisieren:

Euklid (um 300 v. Chr.)



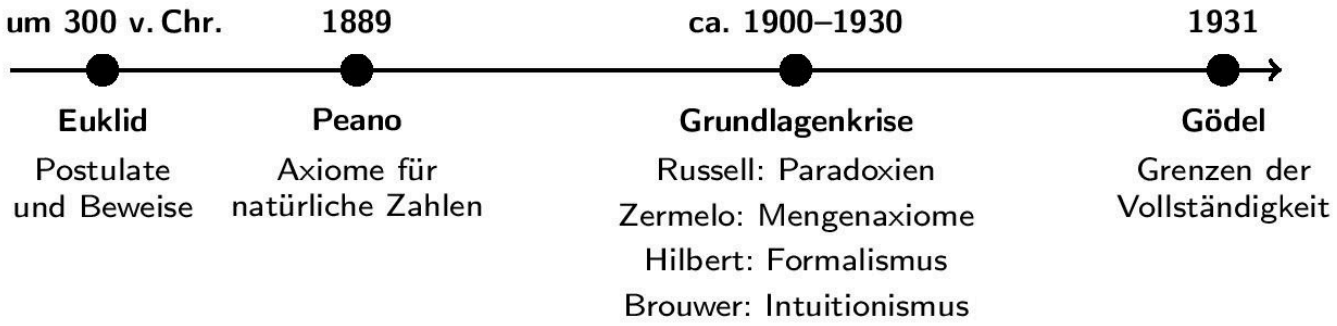
Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

Elemente der Aussagenlogik

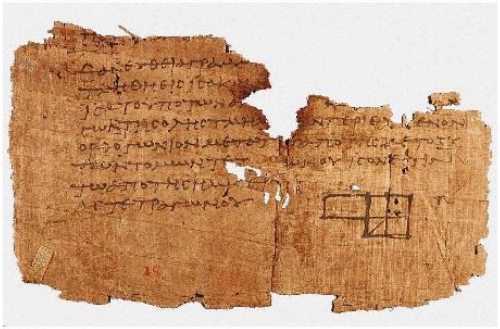
Axiome und Sätze

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt.

Wichtige Eigenschaften von Axiomensystemen sind Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit.[1]



Euklid (um 300 v. Chr.)



Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

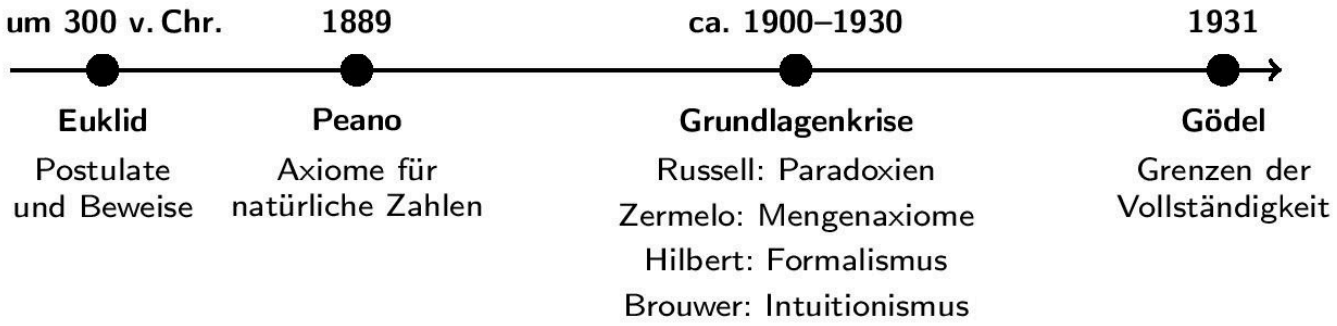
[1] vgl. D. Hofstadter: *Gödel, Escher Bach*. Basic Books, New York NY 1979

Elemente der Aussagenlogik

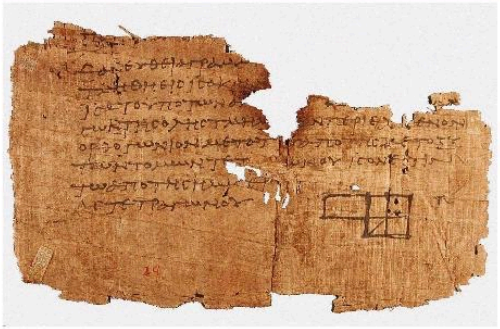
Axiome und Sätze

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt.

Wichtige Eigenschaften von Axiomensystemen sind Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit.[1]



Euklid (um 300 v. Chr.)



Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

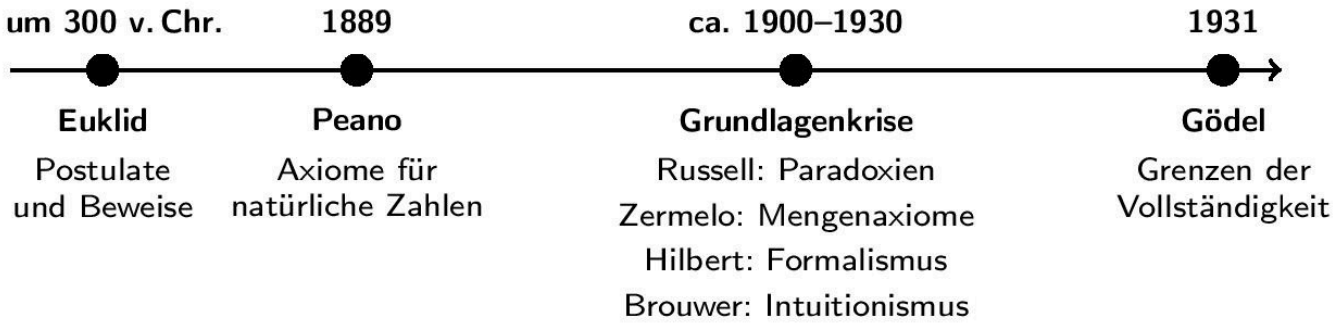
[1] vgl. D. Hofstadter: *Gödel, Escher Bach*. Basic Books, New York NY 1979

Elemente der Aussagenlogik

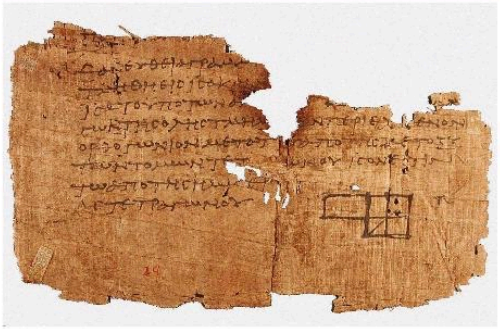
Axiome und Sätze

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt.

Wichtige Eigenschaften von Axiomensystemen sind Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit.[1]



Euklid (um 300 v. Chr.)



Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

[1] vgl. D. Hofstadter: *Gödel, Escher Bach*. Basic Books, New York NY 1979

Elemente der Aussagenlogik

Axiome und Sätze

Ein Satz ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt wurde. Den Beweis bildet dabei eine Kette von Schlussfolgerungen, die nur von Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen ausgeht.

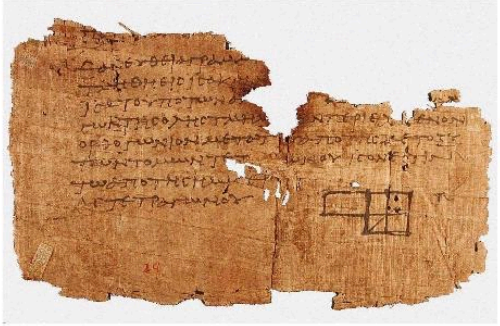
Beispiel: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.“

Gebräuchliche Ausprägungen von Sätzen sind auch

- Lemma (Hilfssatz) – ein Satz, der als Zwischenstufe in einem Beweis dient,
- Korollar (Folgerung) – ein Satz, der ohne großen Beweisaufwand aus einem anderen folgt.

Die Abgrenzung zum Satz ist jeweils fließend und subjektiv.

Euklid (um 300 v. Chr.)



Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

Elemente der Aussagenlogik

Definitionen

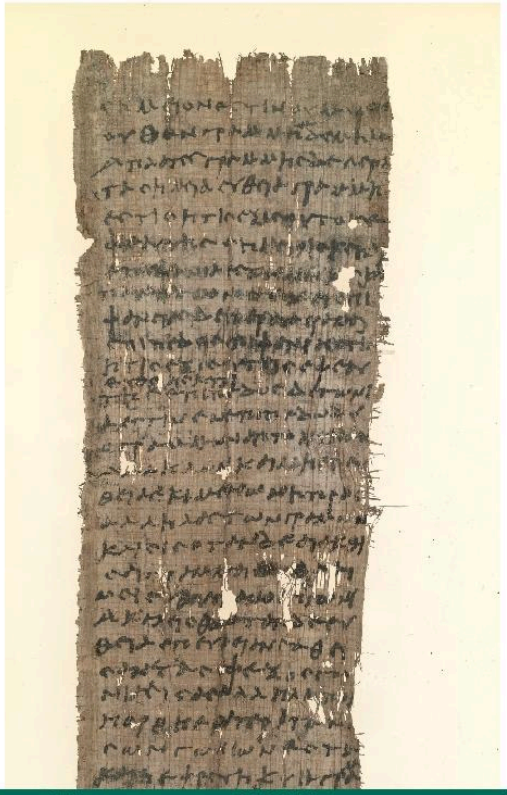
Eine Definition dient zur Festlegung eines mathematischen Begriffs. Hier sind eher Wertungen wie „sinnvoll/nicht sinnvoll“ statt „wahr/falsch“ angebracht. Sinnvolle Definitionen erfüllen unter anderem folgende Anforderungen:

- Widerspruchsfreiheit,
- Zirkelfreiheit (das zu Definierende darf nicht selbst Bestandteil der Definition sein),
- Angemessenheit (nicht zu eng und nicht zu weit gefasst),
- Redundanzfreiheit (keine Bestandteile enthalten, die aus anderen logisch folgen).

Häufig schreibt man Definitionen in der Form von Gleichungen oder Äquivalenzen und verwendet die Symbole $:=$ und $:\Leftrightarrow$. Der zu definierende Ausdruck steht immer auf der Seite des Doppelpunkts.

Beispiel: $a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

Euklid, Elemente I, Definitionen 1–10



Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Elemente der Aussagenlogik

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip als Beispiel

1.2 Elemente der Mengenlehre

1.3 Die reellen Zahlen

1.4 Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

1.5 Abbildungen und Funktionen

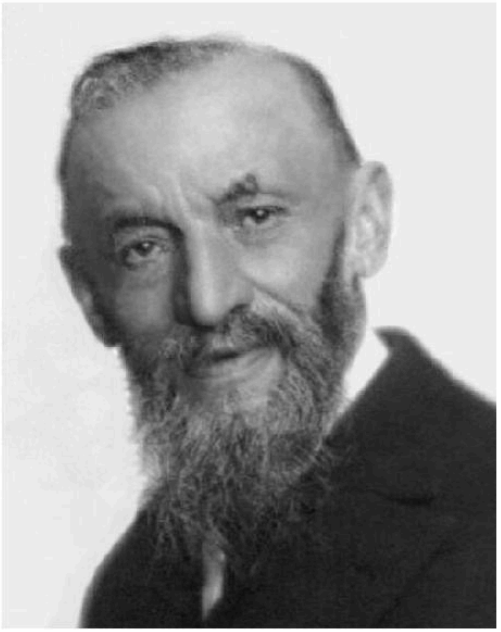
1.6 Komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Was ist eigentlich eine Zahl?

Erklären Sie Ihrem Nachbarn in einer Minute, was die Zahl 3 ist.

Giuseppe Peano
(1858–1932)



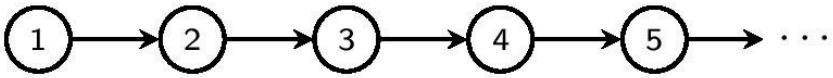
Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Was ist eigentlich eine Zahl?

Erklären Sie Ihrem Nachbarn in einer Minute, was die Zahl 3 ist.

Ein Ausweg: Wir sagen nicht, was Zahlen sind, sondern nur, wie man mit ihnen zählt:

- Man beginnt bei 1.
- Zu jeder Zahl n gibt es einen Nachfolger n' („die nächste Zahl“).

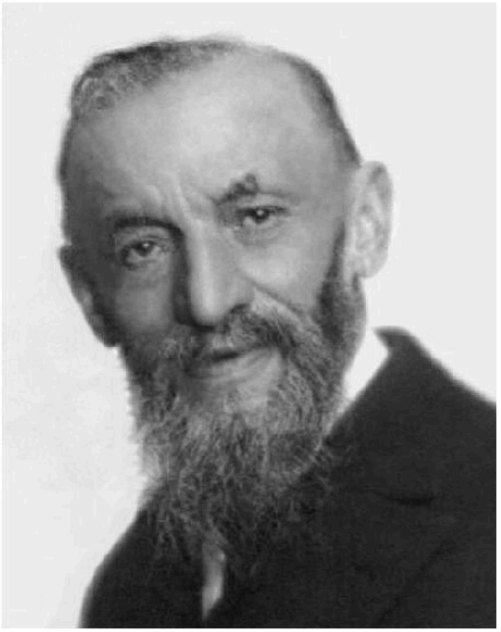


Welche Regeln braucht man, damit dieses Bild – und nur dieses – herauskommt?

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

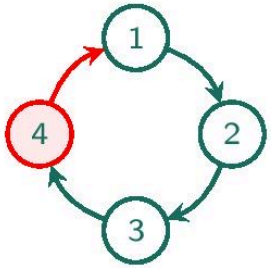
Giuseppe Peano
(1858–1932)



Natürliche Zahlen

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

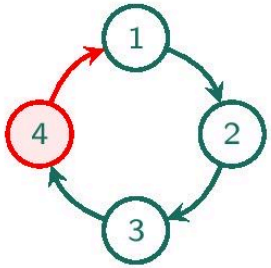


Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Natürliche Zahlen

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.



Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Axiom P3

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n' \neq 1$ für alle n.

Natürliche Zahlen

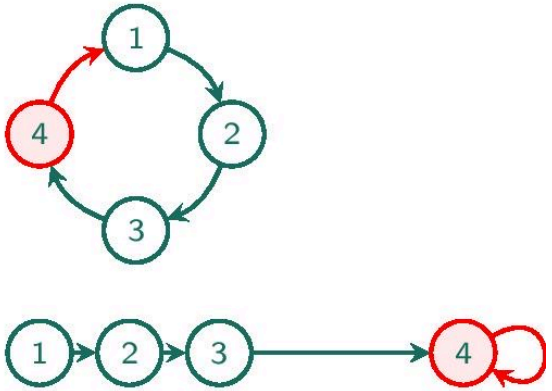
Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Axiom P3

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n' \neq 1$ für alle n.



Natürliche Zahlen

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

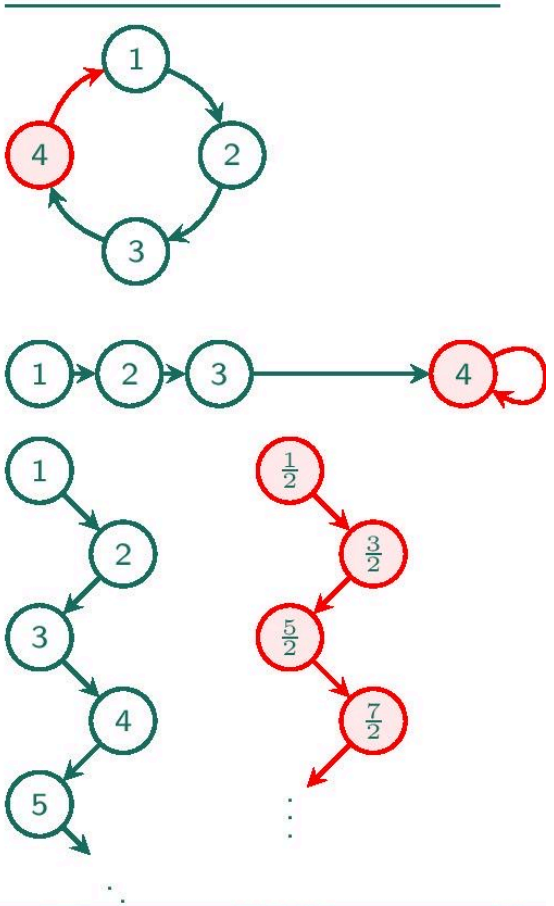
Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Axiom P3

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n' \neq 1$ für alle n.

Axiom P4

(P4) Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger: aus $n' = m'$ folgt $n = m$.



Natürliche Zahlen

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

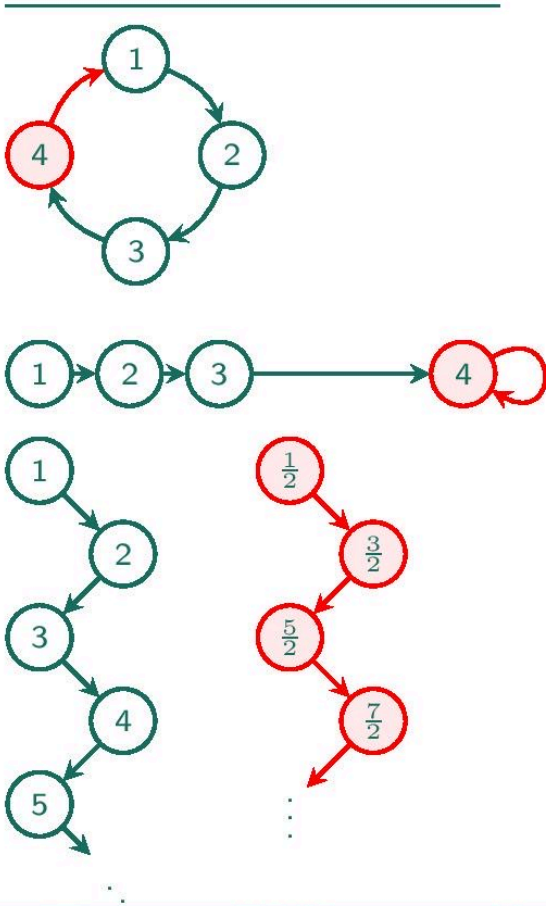
Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Axiom P3

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n' \neq 1$ für alle n.

Axiom P4

(P4) Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger: aus $n' = m'$ folgt $n = m$.



Natürliche Zahlen

Axiome P1 und P2

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch ihr Nachfolger n' eine natürliche Zahl.

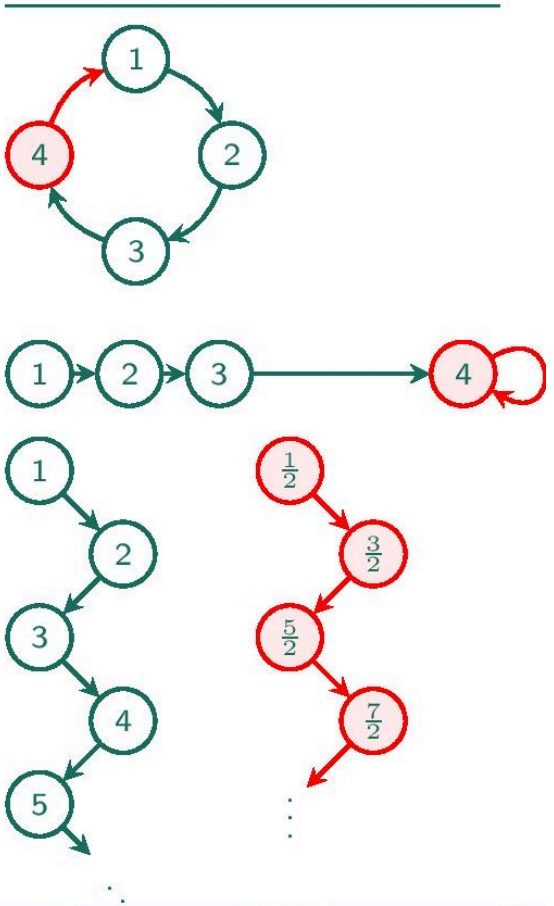
Damit sind $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$ natürliche Zahlen. Wir nennen sie $1, 2, 3, 4, \ldots$

Axiom P3

(P3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl: $n' \neq 1$ für alle n.

Axiom P4

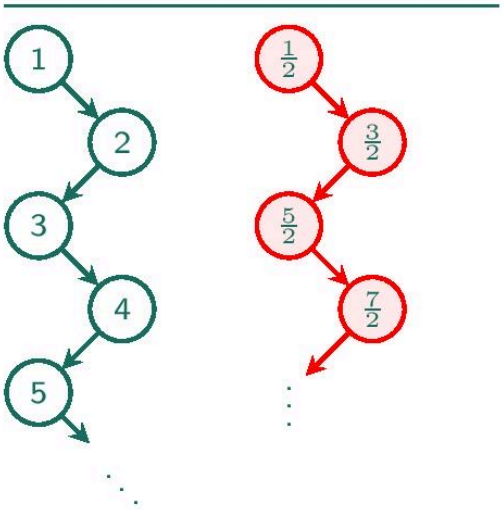
(P4) Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger: aus $n' = m'$ folgt $n = m$.



Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Axiome P1-P4

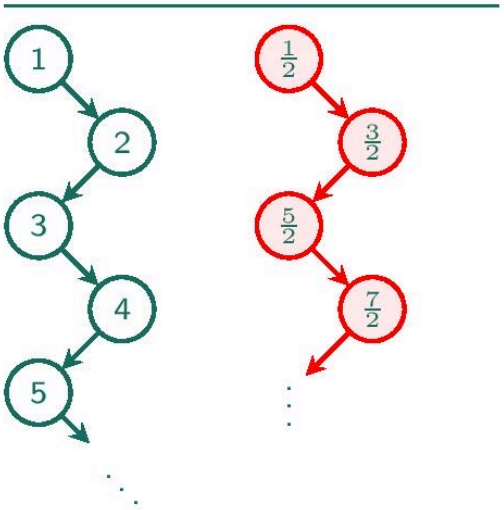
$$
\begin{aligned}
&\textbf{(P1)}\ 1 \in \mathbb{N} \\
&\textbf{(P2)}\ \forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}) \\
&\textbf{(P3)}\ \forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1) \\
&\textbf{(P4)}\ \forall n, m\,(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$



Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Axiome P1-P4

$$\begin{aligned}
&\textbf{(P1)}\ 1 \in \mathbb{N} \\
&\textbf{(P2)}\ \forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}) \\
&\textbf{(P3)}\ \forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1) \\
&\textbf{(P4)}\ \forall n, m\,(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))
\end{aligned} \tag{1.1}$$



Axiom P5 (Induktionsaxiom)

(P5) Ist M eine Menge natürlicher Zahlen mit

- $1 \in M$ und
- für jedes $n \in M$ ist auch $n' \in M$,

so enthält M alle natürlichen Zahlen.

Peano-Axiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem Element 1 und einer Nachfolgerabbildung $n \mapsto n'$, so dass gilt:

(P1) $1 \in \mathbb{N}$,

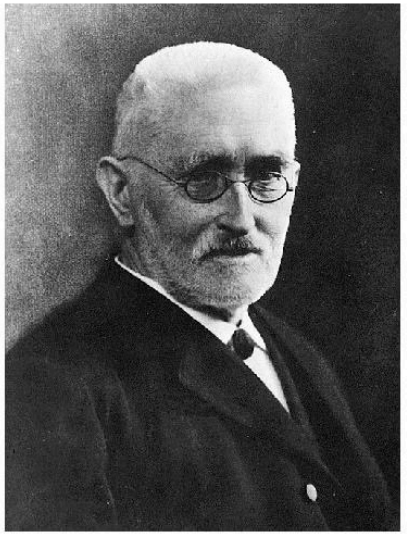
(P2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$,

(P3) $n' \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(P4) $n' = m' \Rightarrow n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$,

(P5) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\big(n \in M \Rightarrow n' \in M\big)$ für alle n, so ist $M = \mathbb{N}$.

Richard Dedekind (1831–1916)



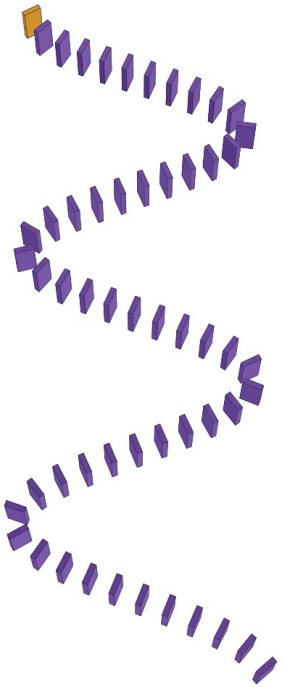
Dedekind formulierte das Axiomensystem im Kern bereits 1888. Peanos formelhafte Fassung setzte sich jedoch durch.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Eine Aussageform $A(n)$ ist genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wenn

- *$A(1)$ wahr ist („Induktionsanfang“),*
- *aus der Gültigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ stets die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt („Induktionsschritt“).*



Der Induktionsschritt sichert also folgende „Kette“ von Implikationen:

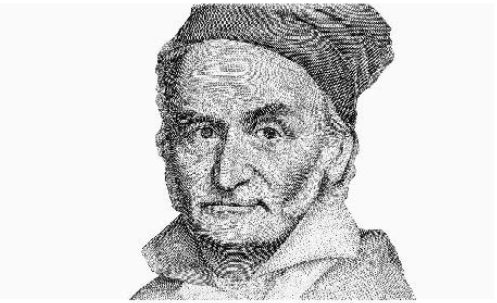
$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow A(n) \Rightarrow A(n+1) \Rightarrow \ldots$$

Man ist natürlich nicht zwingend auf den Startwert 1 festgelegt. Man kann im Induktionsanfang auch bei einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ starten, muss dann aber auch den Induktionsschritt für $n \geq n_0$ beweisen.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Berechnen Sie: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



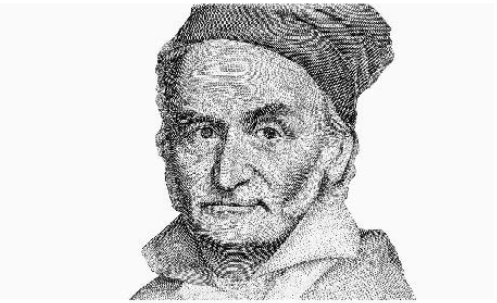
soll als Neunjähriger so die Aufgabe seines Lehrers gelöst haben, während die Mitschüler noch rechneten.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Berechnen Sie: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$

Trick: Man bildet Paare $1 + 100,\ 2 + 99,\ \ldots,\ 50 + 51$. Das sind 50 Paare mit Summe 101, also 5050.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



soll als Neunjähriger so die Aufgabe seines Lehrers gelöst haben, während die Mitschüler noch rechneten.

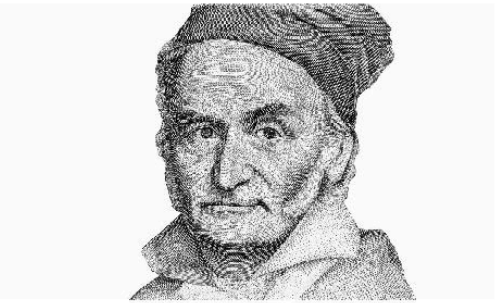
Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Berechnen Sie: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$

Trick: Man bildet Paare $1 + 100,\ 2 + 99,\ \ldots,\ 50 + 51$. Das sind 50 Paare mit Summe 101, also 5050.

Vermutung: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



soll als Neunjähriger so die Aufgabe seines Lehrers gelöst haben, während die Mitschüler noch rechneten.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Berechnen Sie: $1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$

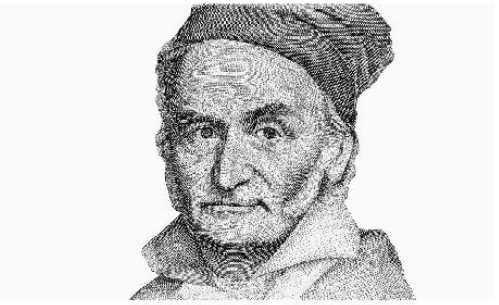
Trick: Man bildet Paare $1 + 100,\ 2 + 99,\ \ldots,\ 50 + 51$. Das sind 50 Paare mit Summe 101, also 5050.

Vermutung: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion. Anfang: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. ✓ Schritt: Gilt die Formel für n, so ist

$$1 + \cdots + n + (n+1) \overset{\text{IA}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad \blacksquare$$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



soll als Neunjähriger so die Aufgabe seines Lehrers gelöst haben, während die Mitschüler noch rechneten.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Rechnen nur mit dem Nachfolger

Addition und Multiplikation werden rekursiv definiert :

Definition

$$n + 1 := n', \qquad n + m' := (n + m)',$$
$$n \cdot 1 := n, \qquad n \cdot m' := n \cdot m + n.$$

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Rechnen nur mit dem Nachfolger

Addition und Multiplikation werden rekursiv definiert :

Definition

$$n + 1 := n', \qquad n + m' := (n + m)',$$
$$n \cdot 1 := n, \qquad n \cdot m' := n \cdot m + n.$$

Beweisen Sie mit dieser Definition: $2 + 2 = 4$.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Rechnen nur mit dem Nachfolger

Addition und Multiplikation werden rekursiv definiert :

Definition

$$n + 1 := n', \qquad n + m' := (n + m)',$$
$$n \cdot 1 := n, \qquad n \cdot m' := n \cdot m + n.$$

Beweisen Sie mit dieser Definition: $2 + 2 = 4$.

$$2 + 2 \;=\; 2 + 1' \;=\; (2 + 1)' \;=\; (2')' \;=\; 3' \;=\; 4.$$