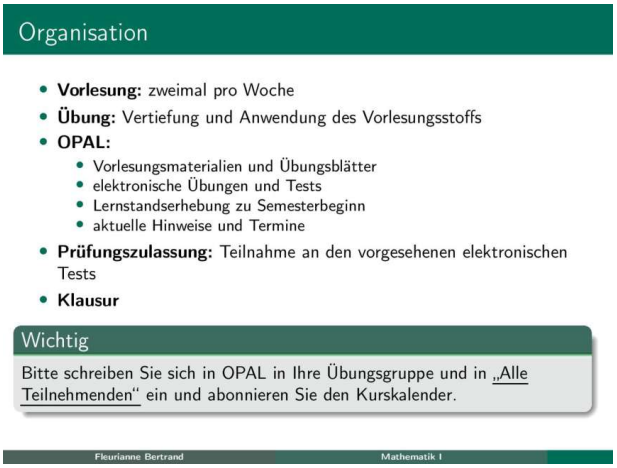
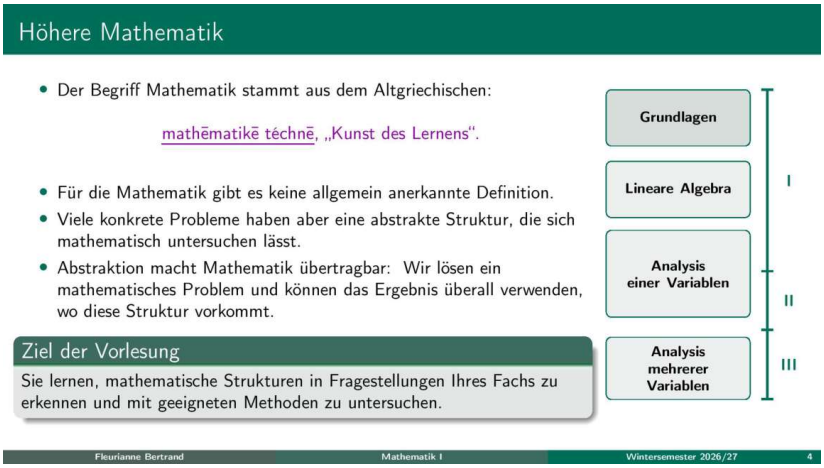
Herzlich willkommen zu Mathematik I, ich freue mich sehr, Sie heute hier zu unserer Vorlesung begrüßen zu dürfen, und ich fühle mich besonders geehrt, an diesem Montagmorgen für viele von Ihnen die erste Vorlesung an der Universität halten zu dürfen.

Damit beginnt für Sie ein neuer Abschnitt, und weil diese Vorlesung Sie durch die nächsten drei Semester begleiten wird, fange ich mit einer kleinen organisatorischen Folie an.





Dabei treffen wir uns zweimal die Woche zur Vorlesung und zusätzlich gibt es die Übungen, in denen Sie den Stoff selbst anwenden und vertiefen können. Alle wichtigen Informationen zu Veranstaltungen, Vorlesungsunterlagen, Übungsblättern und aktuellen Hinweisen finden Sie in OPAL. Dort finden Sie auch die elektronischen Tests, die für Ihre Prüfungszulassung relevant sind. Die Tests sollen Ihnen außerdem helfen, Ihren Lernstand regelmäßig zu überprüfen und früh zu sehen, wo Sie noch einmal nacharbeiten sollten. Und am Ende des Semesters steht dann natürlich die Klausur.



So viel erst einmal zum Ablauf. Aber kommen wir jetzt zur eigentlichen Frage: Was ist überhaupt Höhere Mathematik? Sie machen ja alle schon seit vielen Jahren in der Schule Mathematik. Sie haben gerechnet, Gleichungen gelöst, Funktionen untersucht, Geometrie gemacht und vieles mehr. Aber auch da ist vielleicht gar nicht so klar: Was ist eigentlich Mathematik? Denn es gibt tatsächlich keine allgemein anerkannte Definition. Der Begriff stammt aus dem Altgriechischen und bedeutet ungefähr Kunst des Lernens.

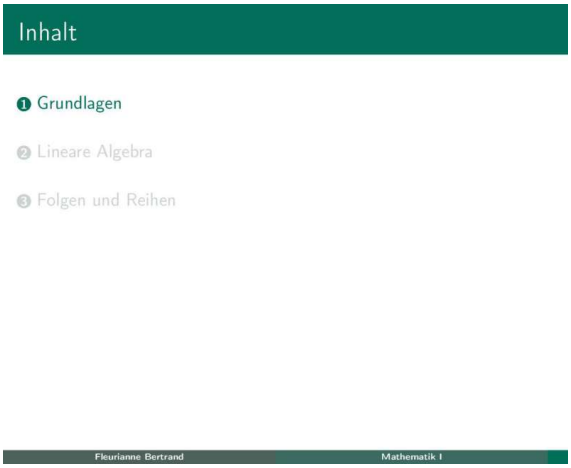
Kunst des Lernens: Da steht also zunächst einmal nichts von Zahlen, Gleichungen oder Rechnen. Und wir werden tatsächlich sehen, dass Mathematik auch nicht an einen bestimmten Gegenstand gebunden ist. Das ist auch der Grund, warum Sie hier aus ganz unterschiedlichen Fachrichtungen zusammenkommen.

Mathematik beschäftigt sich mit ganz unterschiedlichen Objekten. Entscheidend sind oft nicht die konkreten Gegenstände selbst, sondern die Strukturen und Beziehungen dahinter. Und um diese Strukturen erkennen zu können, müssen wir vom konkreten Problem abstrahieren. Wir schauen also nicht nur auf das einzelne Beispiel, sondern auf das, was mathematisch dahintersteckt. Ein konkretes Beispiel dafür ist Pirahã, eine indigene Sprache im brasilianischen Amazonasgebiet. Dort gibt es Mengenwörter wie hói, hoí und baágiso, aber Untersuchungen zeigen, dass diese nicht wie unsere exakten Zahlwörter eins, zwei und drei funktionieren, sondern eher ungefähre Mengen ausdrücken, also etwa wenig, etwas mehr und viele. Das heißt nicht, dass die Sprecher Mengen nicht unterscheiden können. Es zeigt aber sehr schön, dass die abstrakte Idee einer exakten Zahl und das Wort, mit dem eine Sprache diese Zahl bezeichnet, nicht dasselbe sind. Das ist die eigentliche Stärke der Abstraktion: Wenn zwei ganz unterschiedliche Probleme dieselbe mathematische Struktur besitzen, müssen wir die Mathematik nicht zweimal neu erfinden. Wir können dieselbe Idee übertragen.

Genau das ist also das Ziel dieser Vorlesung: Sie sollen lernen, mathematische Strukturen in Fragestellungen Ihres Fachs zu erkennen und zu untersuchen. Hier rechts sehen Sie ungefähr den Weg, den wir dabei gehen werden. Wir beginnen in Mathematik I mit einigen Grundlagen und dann mit der Linearen Algebra. Dort geht es vor allem um Vektoren, Matrizen und lineare Gleichungssysteme, also um Strukturen, die immer dann auftreten, wenn mehrere Größen gleichzeitig miteinander zusammenhängen. Danach kommt die Analysis dazu. Hier geht es stärker um Funktionen und darum, wie sich Größen verändern, also um Grenzwerte, Ableitungen und Integrale. Zunächst betrachten wir Funktionen einer Variablen. Das heißt geometrisch im Wesentlichen: Die Eingabe liegt auf einer Zahlengeraden. Wir können uns dort nach links oder nach rechts bewegen. Der Funktionsgraph selbst kann natürlich in der Ebene liegen.

Später, in der Analysis mehrerer Variablen, ändert sich das wesentlich. In mehreren Dimensionen können wir uns in unendlich viele Richtungen bewegen. Und damit spielen plötzlich die Geometrie und insbesondere die Richtung, in der sich etwas verändert, eine ganz andere Rolle.

Wir werden also ganz oben mit den Grundlagen starten.



1. Grundlagen

Da könnten Sie vielleicht denken: Das sind doch die einfachen Dinge, die Sie längst kennen. Zahlen, Punkte, Mengen, damit arbeiten Sie schließlich schon seit vielen Jahren. Aber gerade bei diesen scheinbar ganz einfachen Konzepten wird es plötzlich schwierig, sobald man hinterfragt, was wir damit eigentlich genau meinen

Zum Beispiel: Was ist eigentlich eine natürliche Zahl? Oder: Was ist ein Punkt? Solche Begriffe müssen wir irgendwie sauber festlegen.

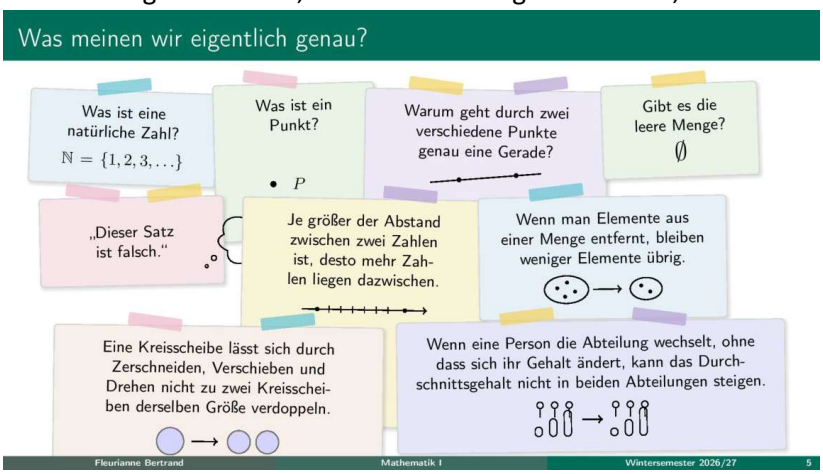
Dann die nächsten Fragen: Warum geht durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade? Oder: Gibt es die leere Menge? Solche Aussagen können wir nicht einfach als selbstverständlich behandeln. Wir müssen entweder begründen, warum sie gelten, oder sie als Ausgangspunkt unserer Theorie annehmen.

Dann steht hier noch der Satz: Dieser Satz ist falsch. Der führt uns sofort in ein Paradox. Denn wenn der Satz wahr ist, dann ist er falsch. Und wenn er falsch ist, dann ist er wahr. Solche Konstruktionen sollten wir also vielleicht aus unserer mathematischen Sprache ausschließen oder zumindest sehr genau festlegen, welche sprachlichen Gebilde wir überhaupt als mathematische Aussagen zulassen.

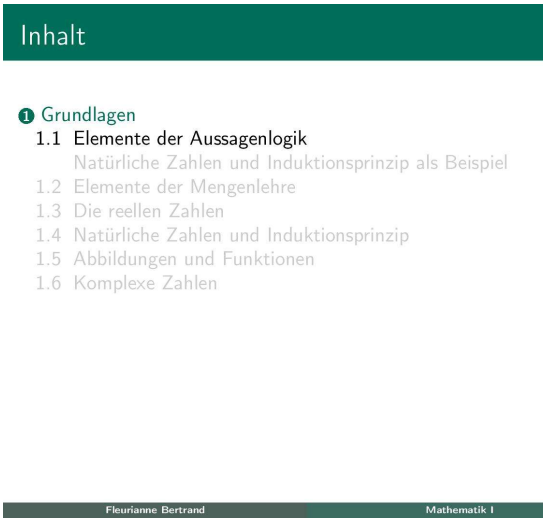
Und die übrigen Aussagen hier haben noch einen anderen Zweck: Sie sollen zeigen, dass wir uns auf unsere Intuition nicht immer verlassen können. Was würden Sie sagen: Liegen zwischen null und einer Million mehr reelle Zahlen als zwischen null und eins? Der Abstand ist viel größer, also klingt das zunächst plausibel. Wir werden aber sehen, dass beide Intervalle gleich viele reelle Zahlen enthalten.

Dann klingt auch der folgende Satz sehr plausibel: Wenn ich aus einer Menge Elemente entferne, bleiben weniger Elemente übrig. Bei endlichen Mengen stimmt das. Bei unendlichen Mengen kann es aber falsch sein. Wenn ich aus den natürlichen Zahlen zum Beispiel alle ungeraden Zahlen entferne, bleiben nur die geraden Zahlen übrig, und trotzdem lassen sich die natürlichen Zahlen und die geraden Zahlen eins zu eins einander zuordnen.

Noch überraschender wird es bei Geometrie. Eine Kreisscheibe kann man in der Ebene nicht in endlich viele Teile zerlegen, diese nur verschieben und drehen und daraus zwei gleich große Kreisscheiben zusammensetzen. Im dreidimensionalen Raum gibt es dagegen das Banach-Tarski-Paradoxon. Eine Kugel kann mathematisch in sehr ungewöhnliche, nicht messbare Punktmengen zerlegt und zu zwei gleich großen Kugeln zusammengesetzt werden. Das sind keine Stücke, die man mit einem Messer ausschneiden könnte. Die Botschaft für uns ist: Bevor wir mit Fläche oder Volumen argumentieren, müssen wir sehr genau wissen, für welche Mengen diese Begriffe überhaupt definiert sind.



Und auch beim Durchschnitt kann uns die Intuition täuschen. Eine einzige Person kann die Abteilung wechseln, ohne dass sich ihr Gehalt ändert, und danach kann das Durchschnittsgehalt in beiden Abteilungen steigen. Das sieht man meistens erst nach kurzem Nachdenken. Auch hier reicht die erste Intuition also nicht.



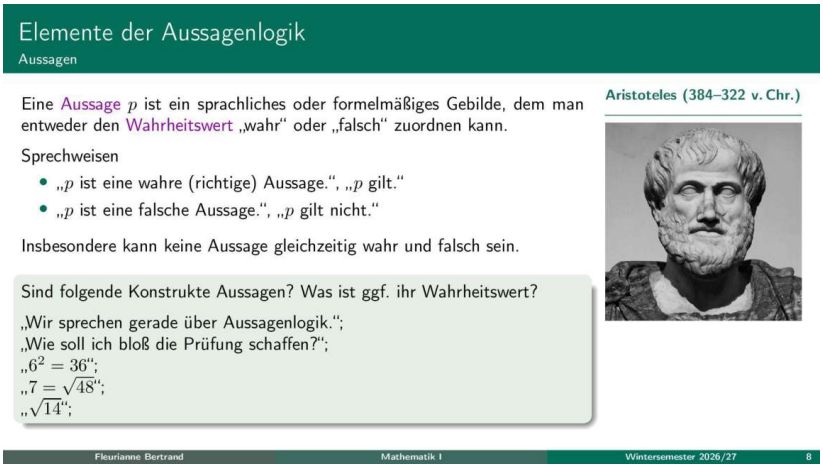
Ich hoffe, das ist Motivation genug dafür, dass wir nicht sofort mit dem Rechnen anfangen, sondern zuerst ein gemeinsames Fundament brauchen: eine präzise Sprache, klare Begriffe und Regeln dafür, wie wir mathematisch argumentieren.

Und genau deshalb beginnen wir mit den Grundlagen. Unser erstes Thema ist die Aussagenlogik. Danach wenden wir dieses sprachliche und logische Gerüst direkt auf die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip an.

Hier begegnet uns auch eine erste Abstraktion. Wir schauen zunächst nicht auf den konkreten Inhalt, sondern auf die logische Form solcher Formulierungen. Welche davon können überhaupt wahr oder falsch sein? Wie lassen sie sich miteinander verknüpfen? Wann kann man aus einer Formulierung auf eine andere schließen? Und wie vermeiden wir dabei Konstruktionen wie Dieser Satz ist falsch? Damit beginnen wir mit der Aussagenlogik.

1.1. Aussagenlogik

Argumentiert haben Menschen natürlich schon sehr viel länger. Aber Aristoteles, der von 384 bis 322 vor Christus lebte, machte die Form des Schlusses selbst zum Gegenstand der Untersuchung. Seine Frage war: Welche Schlussformen sind allgemein gültig, unabhängig davon, worüber wir sprechen? Ein klassisches Beispiel ist: Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich. Der Schluss ist nicht deshalb gültig, weil wir etwas Besonderes über Sokrates wissen, sondern wegen seiner Form. Daraus entstand seine Syllogistik.



Um solche Schlüsse untersuchen zu können, musste Aristoteles zunächst unterscheiden, welche sprachlichen Äußerungen überhaupt wahr oder falsch sein können. Und seine Abgrenzung ist unserer heutigen Definition schon erstaunlich ähnlich: Nicht jeder sinnvolle Satz ist wahr oder falsch. Wir betrachten deshalb zunächst nur solche Sätze, denen wir eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zuordnen können. Solche Sätze nennen wir Aussagen.

Wir können eine Aussage mit einer Variablen bezeichnen, zum Beispiel mit p oder q. Dann kann p den Wahrheitswert wahr oder falsch annehmen. Ist p eine wahre Aussage, sagen wir: p gilt. Ist p eine falsche Aussage, sagen wir: p gilt nicht.

In unserer klassischen Logik kann eine Aussage insbesondere nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Schauen wir die Beispiele kurz gemeinsam an. Wir sprechen gerade über Aussagenlogik ist eine Aussage und im Moment wahr. Wie soll ich bloß die Prüfung schaffen ist zwar ein sinnvoller Satz, aber keine Aussage in unserem Sinn, weil wir ihm nicht wahr oder falsch zuordnen können. Sechs Quadrat ist sechsunddreißig ist eine wahre Aussage. Sieben ist gleich Wurzel achtundvierzig ist eine falsche Aussage. Und Wurzel vierzehn allein ist überhaupt keine Aussage, sondern nur ein mathematischer Ausdruck.

Elemente der Aussagenlogik

Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

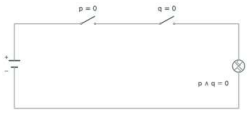
- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“: Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!



Wenn wir Aussagen nun einfach mit p und q bezeichnen, können wir anfangen, sie miteinander zu verknüpfen. Wieder interessiert uns dabei zunächst nicht, worum es inhaltlich geht, sondern nur, welchen Wahrheitswert die neue Aussage hat. Am einfachsten ist die Negation: Aus p wird nicht p. Ist p wahr, dann ist nicht p falsch, und umgekehrt. Dann haben wir die beiden Verknüpfungen, die Sie aus der Alltagssprache längst kennen: und und oder. Bei und müssen beide Aussagen wahr sein, damit die gesamte Aussage wahr ist.

Beim oder müssen wir ein bisschen aufpassen. In der Mathematik bedeutet p oder q: Mindestens eine der beiden Aussagen ist wahr. Es dürfen also auch beide wahr sein, genau das ist in der Tabelle rot markiert. Umgangssprachlich verwenden wir oder manchmal anders. Wenn ich frage: Möchten Sie Kaffee oder Tee?, erwarte ich meistens nicht einfach die Antwort ja. Deshalb schreiben wir die Wahrheitswerte hier explizit in Tabellen auf. p oder q ist in den ersten drei Fällen wahr und nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Elemente der Aussagenlogik

Verknüpfung von Aussagen

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitswert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

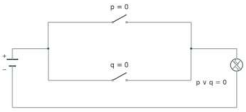
- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“: Umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!





Dass es zwei verschiedene Lesarten von oder gibt, ist allerdings sprachlich nichts Neues, im Lateinischen findet man dafür häufig die Wörter vel und aut, wobei vel oft eher einschließend und aut eher ausschließend verwendet wird. Das ist keine vollkommen starre Sprachregel, aber eine gute Merkhilfe für den Unterschied, den wir hier mathematisch sauber festlegen.

Elemente der Aussagenlogik

Geben Sie den Wahrheitswert der Aussage

„Wir gehen heute Abend ins Kino oder ins Theater“

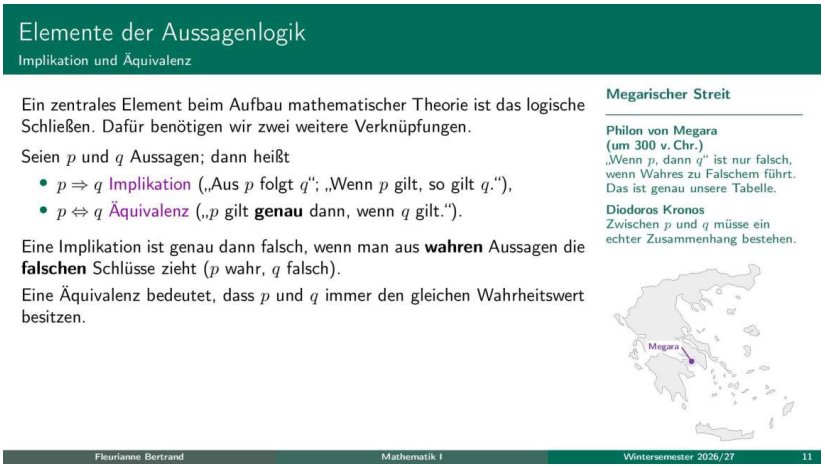
in Abhängigkeit von der tatsächlich durchgeführten Aktivitäten an. Machen Sie sich den Unterschied zur Umgangssprache klar.

Geben Sie die Wahrheitswerte und Negationen zu folgenden Aussagen an:

- p: „Unsere Vorlesung findet heute am Nachmittag statt.“
- q: „Unsere Vorlesung findet heute am Abend statt.“

Warum ist q nicht die Negation von p?

Probieren wir die Unterscheidung einmal sprachlich aus. Wir gehen heute Abend ins Kino oder ins Theater ist im mathematischen Sinn auch dann wahr, wenn wir beides machen. Und bei Unsere Vorlesung findet am Nachmittag statt ist Unsere Vorlesung findet am Abend statt nicht die Negation. Die Negation lautet einfach: Unsere Vorlesung findet nicht am Nachmittag statt. Das lässt viele andere Möglichkeiten offen.



Bis jetzt haben wir Aussagen nur negiert oder mit und und oder verknüpft. Für mathematische Argumente brauchen wir aber noch etwas Entscheidendes: Wir wollen ausdrücken können, dass aus einer Aussage eine andere folgt. Dafür verwenden wir die Implikation und lesen sie: Aus p folgt q oder Wenn p gilt, dann gilt q. Wenn beide Richtungen gelten, sprechen wir von einer Äquivalenz und sagen: p gilt genau dann, wenn q gilt.

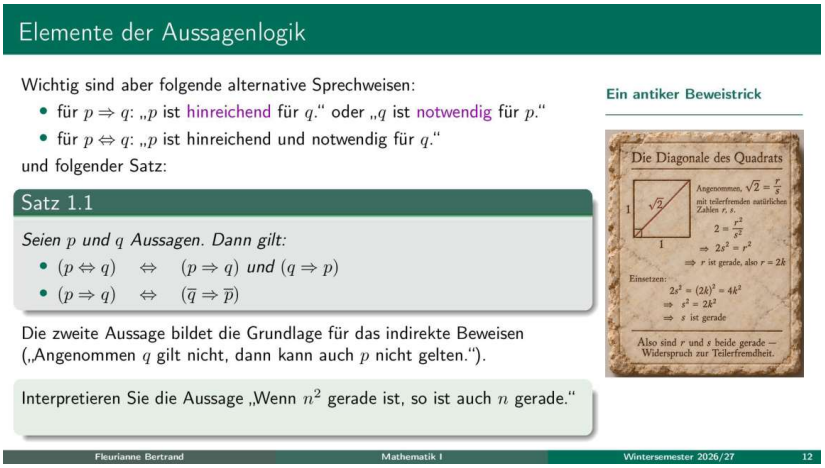
Gerade bei der Implikation war in der Antike keineswegs selbstverständlich, was Wenn dann eigentlich bedeuten soll. Genau deshalb nehme ich diese kleine Geschichte mit: Sie zeigt, dass selbst scheinbar selbstverständliche Grundlagen echte mathematische Entscheidungen enthalten. Um etwa 300 vor Christus wurde darüber im sogenannten Megarischen Streit diskutiert. Philon von Megara sagte im Wesentlichen: Eine Wenn-dann-Aussage ist nur dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Folgerung falsch ist. Diodoros Kronos wollte eine stärkere Bedingung: Für ihn durfte die Kombination Voraussetzung wahr und Folgerung falsch nicht nur gerade nicht auftreten, sondern überhaupt nicht möglich sein.

Für unsere klassische Aussagenlogik entscheiden wir uns tatsächlich für die Auffassung Philons. Die Implikation aus p folgt q ist genau dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist. Das nennt man materiale Implikation. Wir verlangen dabei keinen inhaltlichen oder kausalen Zusammenhang zwischen p und q. An dieser Stelle zählen nur die Wahrheitswerte.

Die zugehörige Wahrheitswerttabelle spielt für den Praktiker kaum eine Rolle – die sprachliche Fassung der Begriffe ist handlicher:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Ein berühmtes Beispiel, das Bertrand Russell zugeschrieben wird, lautet: Wenn zwei plus zwei gleich fünf ist, dann bin ich der Papst. Das klingt natürlich absurd. Aber die Voraussetzung ist falsch, deshalb ist die Implikation in unserer Aussagenlogik wahr. Russell soll sogar weitergerechnet haben: Aus zwei plus zwei gleich fünf folgt eins gleich zwei. Russell und der Papst sind zwei Personen, aber wenn eins gleich zwei wäre, wären sie eine Person. Also wäre Russell der Papst. Natürlich beweist das nicht, dass er der Papst ist. Es zeigt nur, wie ungewohnt die materiale Implikation zunächst wirken kann.



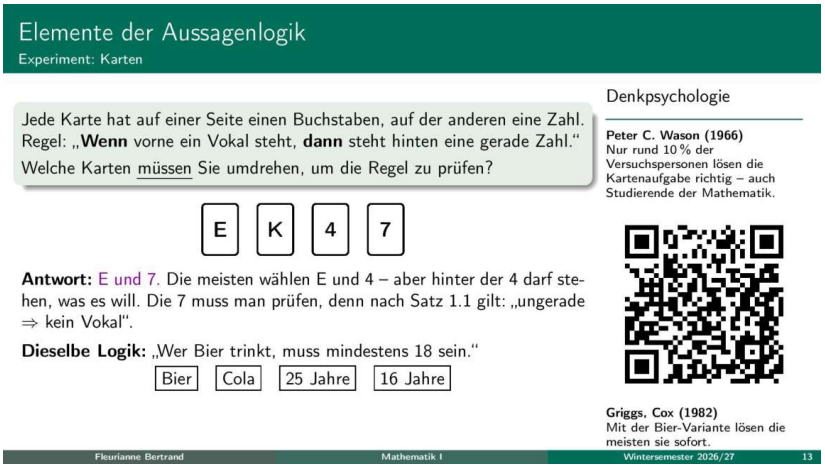
Bei der Implikation gibt es zwei Sprechweisen, die Sie unbedingt kennen müssen. Wenn aus p folgt q gilt, dann ist p hinreichend für q, und q ist notwendig für p. Bei einer Äquivalenz gilt beides in beide Richtungen. Dann ist p notwendig und hinreichend für q und genauso q notwendig und hinreichend für p.

Außerdem folgen aus unserer Definition zwei sehr wichtige Regeln. Eine Äquivalenz bedeutet nichts anderes, als dass beide Implikationen gelten. Und für eine Implikation gilt die sogenannte Kontraposition: Aus p folgt q genau dann, wenn aus nicht q folgt nicht p.

Das ist für Beweise sehr nützlich, weil die kontrapositive Aussage manchmal viel leichter zu zeigen ist als die ursprüngliche Formulierung.

Nehmen wir das Beispiel unten: Wenn n Quadrat gerade ist, dann ist n gerade. Direkt ist das vielleicht nicht sofort offensichtlich. Die Kontraposition lautet: Wenn n ungerade ist, dann ist n Quadrat ungerade. Schreiben wir eine ungerade Zahl als zwei mal k plus eins. Beim Quadrieren entsteht vier mal k Quadrat plus vier mal k plus eins. Das ist wieder zwei mal eine ganze Zahl plus eins und damit ungerade. Damit ist die Kontraposition bewiesen und deshalb auch die ursprüngliche Aussage. Solche indirekten Beweisideen sind sehr alt.

An dieser Stelle greife ich bewusst etwas vor. Wir benutzen schon Eigenschaften natürlicher und rationaler Zahlen, obwohl wir deren sauberen Aufbau erst später behandeln. Die Aussagenlogik ist aber viel anschaulicher mit konkreten Beispielen, zum Beispiel, dass die Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge eins, also Wurzel zwei, keine rationale Zahl ist. Wir nehmen das Gegenteil an: Wurzel zwei lasse sich als vollständig gekürzter Bruch r geteilt durch s schreiben. Nach dem Quadrieren folgt, dass r Quadrat gerade ist, also ist r gerade. Wir schreiben r als zwei mal k und setzen das wieder ein. Dann folgt auch, dass s gerade ist. Damit wären r und s beide durch zwei teilbar. Das widerspricht unserer Annahme, dass der Bruch vollständig gekürzt war. Also kann die Ausgangsannahme nicht stimmen. Wurzel zwei ist irrational. Das ist die typische Idee eines Widerspruchsbeweises. Der Legende nach war diese Entdeckung übrigens für die Pythagoreer so verstörend, dass Hippasos von Metapont, der sie öffentlich gemacht haben soll, dafür auf See ums Leben kam, in manchen Versionen wurde er sogar über Bord geworfen.

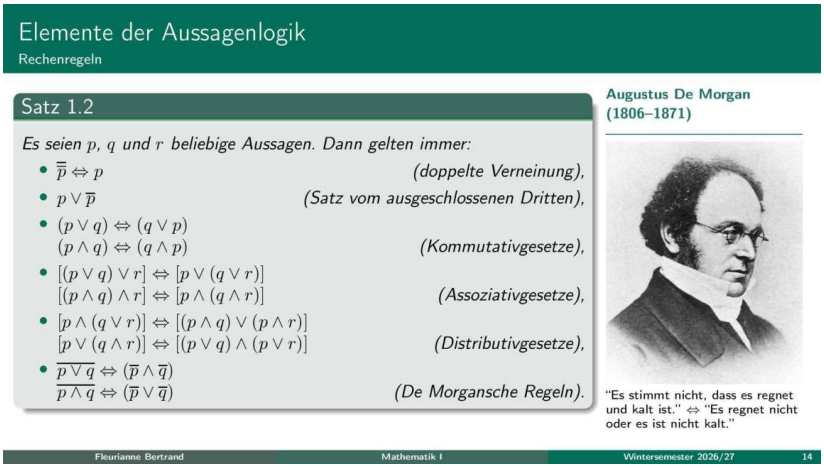


Jetzt testen wir einmal, wie gut diese logischen Regeln tatsächlich unserer Intuition entsprechen. Und Sie dürfen gleich das Paket öffnen. Darin finden Sie vier verpackte Süßigkeiten. Für das Rätsel betrachten wir die Verpackungen als Karten. Stellen Sie sich vor, Sie sind Hersteller und haben die Druckerei gebeten, auf die eine Seite jeder Verpackung einen Buchstaben und auf die Rückseite eine Zahl zu drucken. Zusätzlich gilt die Regel: Wenn vorne ein Vokal steht, dann steht hinten eine gerade Zahl. Welche Karten müssen Sie unbedingt umdrehen, um festzustellen, ob die Regel verletzt wird? Überlegen Sie kurz selbst und halten Sie die entsprechenden verpackten Süßigkeiten hoch. Danach dürfen Sie sie natürlich auch essen.

Ich sehe jetzt schon verschiedene Antworten. Und ich freue mich besonders über alle, die die sieben hochhalten, denn genau dort steckt der Teil der Logik, den man leicht übersieht.

Die richtige Antwort ist E und sieben. E müssen wir umdrehen: Wenn auf der Rückseite eine ungerade Zahl steht, ist die Regel verletzt. K müssen wir nicht umdrehen, denn die Regel sagt nichts darüber, was hinter einem Konsonanten stehen darf. Auch die vier brauchen wir nicht. Aus Wenn Vokal, dann gerade Zahl folgt nicht umgekehrt Wenn gerade Zahl, dann Vokal. Entscheidend ist die sieben. Wenn auf der anderen Seite ein Vokal steht, haben wir ein Gegenbeispiel. Das ist genau die Kontraposition von eben: Wenn Vokal, dann gerade, also wenn nicht gerade, dann kein Vokal.

Aber keine Sorge, wenn Sie anders entschieden haben: Damit sind Sie nicht allein. Diese Aufgabe geht auf den Denkpsychologen Peter Wason zurück und wird in der abstrakten Form sehr häufig falsch gelöst. Spannend ist, was passiert, wenn wir nur den Inhalt ändern, nicht die logische Struktur. Die Regel lautet jetzt: Wer Bier trinkt, muss mindestens achtzehn Jahre alt sein. Wieder haben wir vier Karten: Bier, Cola, fünfundzwanzig Jahre und sechzehn Jahre. Kontrollieren müssen wir Bier und sechzehn Jahre. Cola interessiert uns nicht, und bei fünfundzwanzig Jahren ist für diese Regel egal, was die Person trinkt. Logisch ist das exakt dieselbe Aufgabe wie eben, trotzdem fällt sie den meisten Menschen in dieser Form viel leichter.



Nachdem wir gesehen haben, dass unsere Intuition bei logischen Schlüssen durchaus einmal danebenliegen kann, wollen wir einige Rechenregeln der Aussagenlogik festhalten. Die erste lautet: Wenn ich eine Aussage zweimal verneine, bekomme ich wieder die ursprüngliche Aussage. Das können wir direkt an den Wahrheitswerten prüfen. Wenn das für Sie selbstverständlich klingt, arbeiten Sie bereits mit unserer klassischen Logik. Brouwer steht hier aber nicht zufällig am Rand. Im Intuitionismus wird insbesondere der Schritt von nicht nicht p zu p nicht allgemein zugelassen. Vereinfacht gesagt liefert ein Widerspruch zur Annahme nicht p dort noch nicht automatisch einen direkten Beweis von p. Die Richtung von p zu nicht nicht p gilt dagegen auch dort. Für unsere Vorlesung arbeiten wir mit klassischer Logik und dürfen die doppelte Verneinung in beide Richtungen verwenden.

Ganz ähnlich ist es beim Satz vom ausgeschlossenen Dritten: p oder nicht p. In der klassischen Logik muss eine der beiden Möglichkeiten gelten. Brouwers Intuitionismus verlangt dagegen in vielen Situationen eine konstruktive Begründung und akzeptiert dieses Prinzip deshalb nicht uneingeschränkt. Ich will Sie mit diesem kleinen Seitenblick aber gar nicht verwirren. Für unsere Vorlesung arbeiten wir mit klassischer Aussagenlogik, und dort gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Es gilt entweder p oder nicht p.

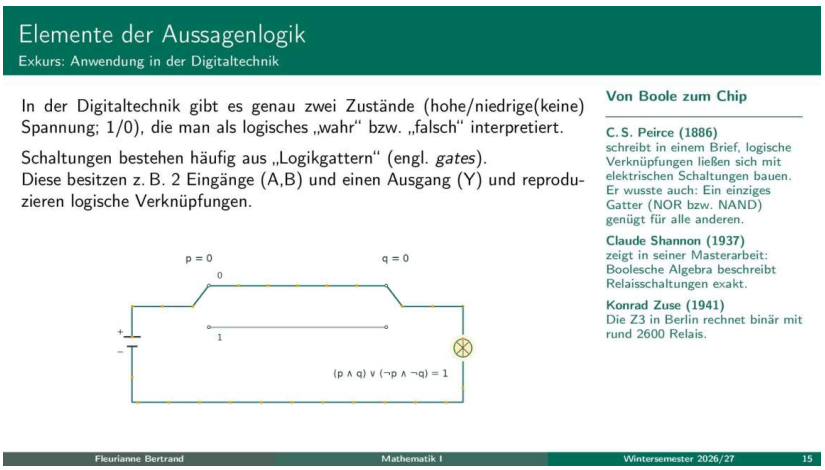
Die nächsten Regeln kennen Sie in ähnlicher Form bereits aus dem Rechnen. Bei und und oder spielt die Reihenfolge keine Rolle. p und q hat denselben Wahrheitswert wie q und p, und genauso ist es beim oder. Zum Beispiel bedeutet Es regnet und es ist kalt logisch dasselbe wie Es ist kalt und es regnet. Das nennen wir Kommutativgesetze.

Auch die Klammerung spielt bei mehreren und-Verknüpfungen beziehungsweise mehreren oder-Verknüpfungen keine Rolle. Das sind die Assoziativgesetze. Und spätestens jetzt sieht das Ganze immer stärker nach Algebra aus. Genau das ist historisch mit George Boole verbunden: Im neunzehnten Jahrhundert behandelt er logische Operationen algebraisch. Daher kommt übrigens unser heutiges Wort boolesch, etwa bei booleschen Variablen in der Informatik.

Dann kommen die Distributivgesetze. Auch hier ist die Ähnlichkeit zur gewöhnlichen Algebra kein Zufall. Ein sprachliches Beispiel ist: Ich fahre mit dem Fahrrad, und zwar heute oder morgen. Das entspricht logisch: Ich fahre heute mit dem Fahrrad oder ich fahre morgen mit dem Fahrrad. Wir verteilen also eine Bedingung auf zwei Möglichkeiten.

Und schließlich die De-Morganschen Regeln. Wenn es nicht stimmt, dass es regnet und kalt ist, dann muss mindestens eines von beiden falsch sein: Es regnet nicht oder es ist nicht kalt. Und entsprechend wird die Negation eines oder zu einem und der Negationen. Diese Regeln werden später sehr wichtig, wenn wir kompliziertere Aussagen und insbesondere Quantoren negieren.

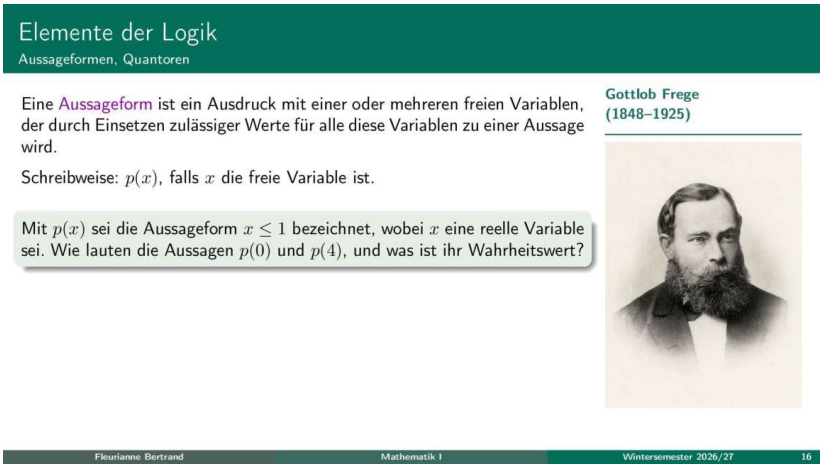
Diese Regeln leben übrigens nicht nur auf dem Papier. Sie stecken ganz konkret in Computern.



In der Digitaltechnik können wir zwei Zustände als null und eins auffassen, also logisch als falsch und wahr. Bei dieser Wechselschaltung legen wir fest, welche Schalterstellung für wahr steht und dass eine leuchtende Lampe den Wahrheitswert wahr bedeutet. Gehen wir die vier Kombinationen durch, sehen wir: Die Lampe leuchtet genau dann, wenn beide Schalter denselben Zustand haben, also beide wahr oder beide falsch sind. Logisch ist das eine Äquivalenz. So wird aus einer Wahrheitstafel tatsächlich eine elektrische Schaltung.

Bisher waren unsere Aussagen immer vollständig und damit entweder wahr oder falsch. Schauen wir jetzt auf diese drei Formulierungen. Drei ist gerade ist falsch. Vier ist gerade ist wahr. Aber was ist mit x ist gerade? Ist das wahr oder falsch? Das können wir noch gar nicht entscheiden, solange wir nicht wissen, welchen Wert x hat.

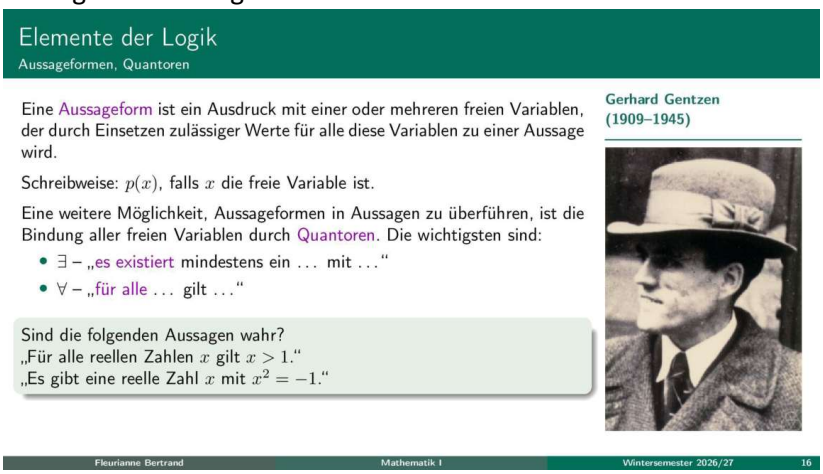




Genau solche Ausdrücke nennen wir Aussageformen. Eine Aussageform enthält eine oder mehrere freie Variablen. Erst wenn wir für diese Variablen konkrete zulässige Werte einsetzen, entsteht daraus eine Aussage, der wir wahr oder falsch zuordnen können. Frege beschreibt solche Ausdrücke als ergänzungsbedürftig oder ungesättigt. Es fehlt noch die Einsetzung für die freie Variable.

Wenn x unsere freie Variable ist, schreiben wir für die Aussageform zum Beispiel p von x. Damit bezeichnen wir noch keine einzelne Aussage mit festem Wahrheitswert. Der Wahrheitswert hängt davon ab, welchen zulässigen Wert wir für x einsetzen. Deshalb müssen wir auch sagen, aus welchem Bereich x stammen darf.

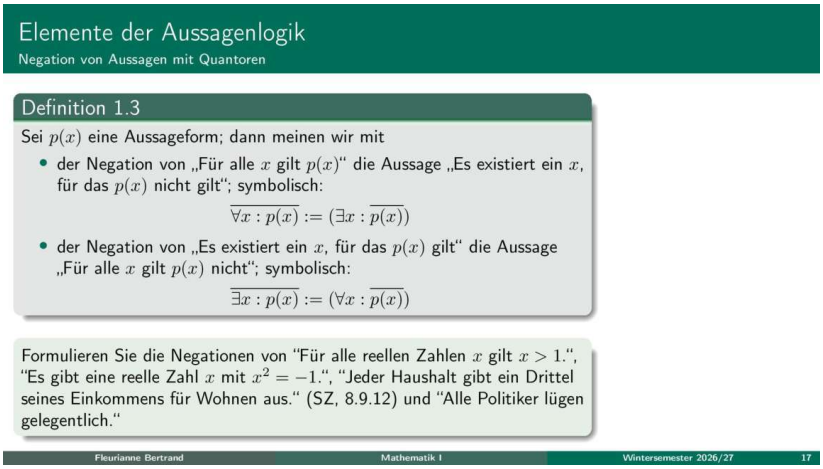
Nehmen wir als Beispiel p von x: x ist kleiner oder gleich eins, wobei x eine reelle Zahl sein soll. Setzen wir x gleich null ein, erhalten wir eine wahre Aussage. Setzen wir x gleich vier ein, erhalten wir eine falsche Aussage. Die Aussageform selbst wird also erst durch das Einsetzen zu einer Aussage.



Nun wollen wir natürlich nicht immer jeden Wert einzeln einsetzen. Wir möchten zum Beispiel sagen können: Es gibt mindestens einen Wert x, für den p von x gilt. Dafür verwenden wir den Existenzquantor. Das Symbol bedeutet also: Es existiert mindestens ein x mit dieser Eigenschaft. Sie können es sich als umgedrehtes E merken, E wie existiert.

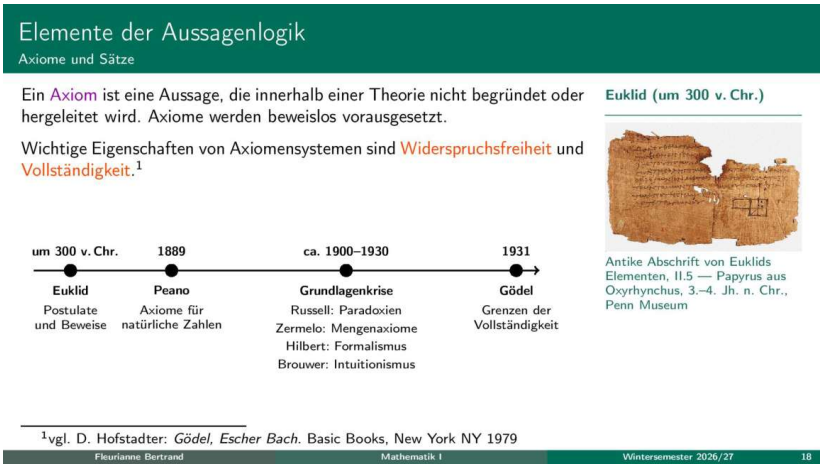
Die zweite grundlegende Möglichkeit ist: Die Aussage soll für alle zulässigen x gelten. Dafür verwenden wir den Allquantor. Das Zeichen können Sie sich als umgedrehtes A merken, A wie alle. Wir können jetzt also präzise zwischen Es gibt mindestens ein x und Für alle x unterscheiden.

Schauen wir uns die beiden Beispiele an. Für alle reellen Zahlen x gilt x größer als eins ist falsch. Ein einziges Gegenbeispiel genügt, zum Beispiel x gleich null. Es gibt eine reelle Zahl x, deren Quadrat minus eins ist, ist ebenfalls falsch. Hier sieht man einen wichtigen Unterschied: Um eine Allaussage zu widerlegen, reicht ein einziges Gegenbeispiel. Um eine Existenzaussage zu beweisen, reicht dagegen ein einziges Beispiel.



Jetzt können wir auch Quantoren sauber negieren. Die Negation von Für alle x gilt p von x lautet: Es gibt mindestens ein x, für das p von x nicht gilt. Ganz einfach gesagt: Nicht alle haben die Eigenschaft bedeutet, mindestens einer hat sie nicht. Und umgekehrt lautet die Negation von Es gibt ein x mit p von x: Für alle x gilt p von x nicht. Genau solche sprachlichen Negationen sind eine häufige Fehlerquelle.

Damit haben wir jetzt einen großen Teil der Sprache zusammen, die wir für mathematisches Argumentieren brauchen. Wir können Aussagen bilden, sie verknüpfen, Schlussfolgerungen formulieren und mit Quantoren über ganze Bereiche sprechen. Jetzt können wir fragen: Wie baut man daraus eigentlich eine mathematische Theorie auf?



Irgendwo muss eine mathematische Theorie anfangen. Wir können nicht jede Aussage aus einer vorherigen beweisen, sonst könnten wir immer weiter zurückfragen. Deshalb brauchen wir Ausgangspunkte. Solche Aussagen nennen wir Axiome. Ein Axiom wird innerhalb der betrachteten Theorie nicht mehr bewiesen, sondern vorausgesetzt. Ein berühmtes historisches Beispiel ist Euklid: Er beginnt seine Elemente mit Definitionen und Postulaten und leitet daraus weitere Aussagen ab.

Gerade Euklids fünftes Postulat ist ein schönes Beispiel dafür, dass die Wahl unserer Ausgangspunkte eine Rolle spielt. In einer heute gebräuchlichen äquivalenten Formulierung sagt man: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es genau eine Gerade, die zu ihr parallel ist. Lange versuchte man, diese Eigenschaft aus den übrigen Voraussetzungen zu beweisen. Das gelingt nicht, denn sie ist eine zusätzliche Annahme. Andere Annahmen über Parallelen führen zu anderen Geometrien. Ein Axiom ist also nicht einfach etwas, das uns anschaulich selbstverständlich erscheint. Es gehört zu den Voraussetzungen der Theorie, mit der wir gerade arbeiten.

Besonders wichtig ist, dass unser System widerspruchsfrei ist. Wir wollen nicht sowohl eine Aussage als auch ihre Negation beweisen können. Historisch gab es außerdem die Hoffnung, Mathematik möglichst vollständig durch formale Axiomensysteme zu erfassen. Gödel hat im zwanzigsten Jahrhundert gezeigt, dass für hinreichend starke, konsistente und effektiv axiomatisierte Systeme fundamentale Grenzen bestehen. Das müssen wir heute noch nicht im Detail verstehen. Wichtig ist nur: Auch die Möglichkeiten eines Axiomensystems selbst sind ein mathematisches Thema.

Elemente der Aussagenlogik

Axiome und Sätze

Ein Satz ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt wurde. Den Beweis bildet dabei eine Kette von Schlussfolgerungen, die nur von Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen ausgeht.

Beispiel: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl."

Gebräuchliche Ausprägungen von Sätzen sind auch

- Lemma (Hilfssatz) – ein Satz, der als Zwischenstufe in einem Beweis dient,
- Korollar (Folgerung) – ein Satz, der ohne großen Beweisaufwand aus einem anderen folgt.

Die Abgrenzung zum Satz ist jeweils fließend und subjektiv.

Euklid (um 300 v. Chr.)



Antike Abschrift von Euklids Elementen, II.5 — Papyrus aus Oxyrhynchus, 3.–4. Jh. n. Chr., Penn Museum

Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 18

Wenn wir unsere Ausgangspunkte festgelegt haben, können wir daraus mit logischen Schlussregeln neue Aussagen herleiten. Eine solche bewiesene Aussage nennen wir einen Satz, und die Herleitung nennen wir einen Beweis. Unser Beispiel Wurzel zwei ist irrational ist also ein Satz. Wir haben diese Aussage nicht vorausgesetzt, sondern bewiesen. Ein Lemma ist meist ein Hilfssatz für einen späteren Beweis. Ein Korollar ist eine Folgerung, die sich relativ unmittelbar aus einem vorherigen Satz ergibt.

Neben Axiomen und Sätzen brauchen wir Definitionen. Eine Definition ist keine Behauptung, die wir beweisen müssen.

Wir legen damit fest, wie ein mathematischer Begriff verwendet werden soll. Eine gute Definition sollte eindeutig und nicht zirkulär sein und genau den Bereich erfassen, den wir beschreiben wollen. Bei Doppelpunkt gleich beziehungsweise Doppelpunkt genau dann zeigt der Doppelpunkt die Seite an, die wir gerade definieren. Auch Euklid beginnt seine Elemente mit Definitionen. Berühmt ist etwa seine Beschreibung eines Punktes als etwas, das keine Teile hat. Bei dem Beispiel a hoch null gleich eins sollten wir streng genommen ergänzen, dass a nicht null sein darf.

Elemente der Aussagenlogik

Definitionen

Eine Definition dient zur Festlegung eines mathematischen Begriffs. Hier sind eher Wertungen wie „sinnvoll/nicht sinnvoll" statt „wahr/falsch" angebracht. Sinnvolle Definitionen erfüllen unter anderem folgende Anforderungen:

- Widerspruchsfreiheit,
- Zirkelfreiheit (das zu Definierende darf nicht selbst Bestandteil der Definition sein),
- Angemessenheit (nicht zu eng und nicht zu weit gefasst),
- Redundanzfreiheit (keine Bestandteile enthalten, die aus anderen logisch folgen).

Häufig schreibt man Definitionen in der Form von Gleichungen oder Äquivalenzen und verwendet die Symbole $:=$ und $:\Leftrightarrow$. Der zu definierende Ausdruck steht immer auf der Seite des Doppelpunkts.

Beispiel: $a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

Euklid, Elemente I, Definitionen 1–10



Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 19

Damit haben wir unsere ersten sprachlichen Grundlagen gelegt. Jetzt wollen wir dieses Gerüst zum ersten Mal auf etwas anwenden, das Ihnen vermutlich selbstverständlich vorkommt: die natürlichen Zahlen.

Inhalt

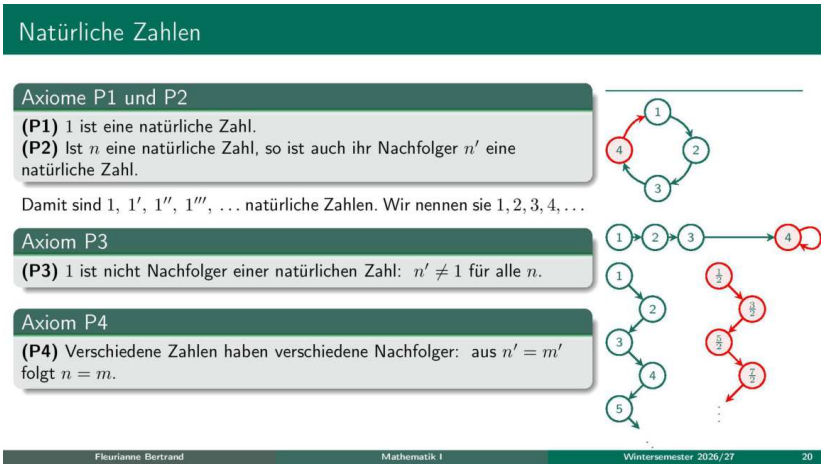
1 Grundlagen
- 1.1 Elemente der Aussagenlogik
- Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip als Beispiel
- 1.2 Elemente der Mengenlehre
- 1.3 Die reellen Zahlen
- 1.4 Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip
- 1.5 Abbildungen und Funktionen
- 1.6 Komplexe Zahlen



Bevor ich Ihnen etwas vorgebe, probieren Sie es selbst: Erklären Sie Ihrem Nachbarn in einer Minute, was die Zahl drei eigentlich ist. Nicht einfach die Ziffer drei hinschreiben und auch nicht drei Gegenstände zeigen. Die Frage ist wirklich: Was ist die Zahl drei?

Das ist erstaunlich schwierig, obwohl Sie alle seit vielen Jahren vollkommen selbstverständlich mit drei rechnen. Wir nehmen die Peano-Axiome jetzt als besonders klares Beispiel dafür, wie man eine vertraute Struktur axiomatisch beschreibt. Das ist nicht die einzige Möglichkeit, natürliche Zahlen aufzubauen. In der Mengenlehre kann man sie auch konkret konstruieren. Uns interessiert hier zunächst die Struktur.

Ein möglicher Ausweg ist also: Wir sagen zunächst gar nicht, was Zahlen eigentlich sind, sondern beschreiben nur die Struktur, die sie haben sollen. Wir beginnen bei eins. Und zu jeder Zahl gibt es einen Nachfolger, also die nächste Zahl. So erhalten wir eins, zwei, drei, vier und so weiter. Die ersten beiden Axiome formulieren genau das: Eins ist eine natürliche Zahl, und mit jeder natürlichen Zahl gehört auch ihr Nachfolger wieder zu den natürlichen Zahlen. Aber jetzt kommt sofort die Frage: Reicht das wirklich schon?



.

Nein. Die ersten beiden Axiome würden zum Beispiel auch dieses System erlauben: Nach vier gehen wir einfach wieder zu eins zurück. Wir könnten also im Kreis zählen. Jede Zahl hat weiterhin einen Nachfolger, aber offensichtlich ist das nicht das, was wir mit den natürlichen Zahlen meinen.

Deshalb ergänzen wir das dritte Axiom: Eins darf kein Nachfolger einer natürlichen Zahl sein. Damit verhindern wir, dass wir durch wiederholtes Weiterzählen irgendwann wieder bei eins ankommen. Der Kreis ist ausgeschlossen. Aber reicht das jetzt?

Auch die ersten drei Axiome reichen noch nicht. Wir könnten zum Beispiel bei vier stecken bleiben: Eins geht auf zwei, zwei auf drei, drei auf vier, und vier wieder auf vier. Eins ist trotzdem kein Nachfolger, also ist das dritte Axiom erfüllt. Das Problem ist jetzt ein anderes: Drei und vier haben denselben Nachfolger.

Genau das verbietet das vierte Axiom. Verschiedene Zahlen sollen verschiedene Nachfolger besitzen. Äquivalent formuliert: Wenn zwei Nachfolger gleich sind, dann müssen bereits die Ausgangszahlen gleich gewesen sein. Damit haben wir sowohl den Kreis als auch dieses Steckenbleiben ausgeschlossen.

Sind wir jetzt fertig? Noch immer nicht. Wir können nämlich unsere übliche Kette eins, zwei, drei, vier und so weiter nehmen und daneben einfach noch eine zweite, völlig unabhängige Kette setzen. Auch dieses größere System erfüllt die ersten vier Axiome.

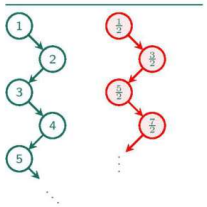
Das Problem ist: Unsere bisherigen Axiome verlangen nirgends, dass wirklich jedes Element von eins aus durch wiederholte Nachfolgerbildung erreichbar sein muss. Die zweite Kette stört die ersten vier Axiome überhaupt nicht. Uns fehlt also noch eine Bedingung, die sagt: Es gibt nichts zusätzlich neben der Kette, die bei eins beginnt.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Axiome P1-P4

(P1) $1 \in \mathbb{N}$
(P2) $\forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
(P3) $\forall n\,(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1)$
(P4) $\forall n, m\,(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$

(1.1)



Axiom P5 (Induktionsaxiom)

(P5) Ist M eine Menge natürlicher Zahlen mit
- $1 \in M$ und
- für jedes $n \in M$ ist auch $n' \in M$,

so enthält M alle natürlichen Zahlen.

Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 20

Hier stehen die ersten vier Axiome noch einmal in ihrer formalen Schreibweise. Und rechts sehen wir den Störenfried noch einmal: Die zusätzliche Kette erfüllt all diese Bedingungen. Genau diese Lücke soll das fünfte Axiom schließen.

Das fünfte Axiom ist das Induktionsaxiom. Nehmen wir eine Teilmenge M der natürlichen Zahlen. Wenn eins in M liegt und mit jedem Element von M auch dessen Nachfolger wieder in M liegt, dann muss M bereits alle natürlichen Zahlen enthalten. Betrachten wir in unserem Beispiel nur die obere Kette eins, zwei, drei und so weiter. Sie enthält eins und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger. Nach dem fünften Axiom muss diese Kette daher schon die gesamte Menge der natürlichen Zahlen sein. Für die zusätzliche zweite Kette bleibt kein Platz.

Hier stehen die fünf Regeln noch einmal zusammen. Interessant ist übrigens, dass diese Idee nicht einfach aus dem Nichts bei Peano auftaucht. Richard Dedekind hatte die zugrunde liegende Struktur im Kern bereits 1888 beschrieben. Peanos kompakte symbolische Fassung von 1889 hat sich dann als die bekannte Form durchgesetzt, deshalb sprechen wir heute meist von den Peano-Axiomen. Und das fünfte Axiom ist besonders interessant, denn darin steckt bereits eines der wichtigsten Beweisprinzipien der Mathematik.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Die Peano-Axiome im Überblick

Peano-Axiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem Element 1 und einer Nachfolgerabbildung $n \mapsto n'$, so dass gilt:

(P1) $1 \in \mathbb{N}$,
(P2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$,
(P3) $n' \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(P4) $n' = m' \Rightarrow n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$,
(P5) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $(n \in M \Rightarrow n' \in M)$ für alle n, so ist $M = \mathbb{N}$.

Richard Dedekind (1831–1916)



Dedekind formulierte das Axiomensystem im Kern bereits 1888. Peanos formelhafte Fassung setzte sich jedoch durch.

Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 21

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist genau die Idee des fünften Axioms in einer anderen Sprache. Angenommen, wir möchten zeigen, dass eine Aussage A von n für alle natürlichen Zahlen n gilt. Dann betrachten wir die Menge M aller natürlichen Zahlen, für die A von n wahr ist. Wenn wir zeigen, dass A von eins wahr ist, liegt eins in M. Und wenn wir zeigen, dass aus A von n immer A von n plus eins folgt, dann liegt mit jeder Zahl aus M auch ihr Nachfolger in M. Das fünfte Axiom sagt dann: M muss die gesamte Menge der natürlichen Zahlen sein. Das sind unsere beiden Schritte: Induktionsanfang und Induktionsschritt. Wir müssen dabei nicht zwingend bei eins beginnen. Wir können auch bei einem anderen Startwert anfangen.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Eine Aussageform $A(n)$ ist genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wenn
- *$A(1)$ wahr ist („Induktionsanfang“),*
- *aus der Gültigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ stets die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt („Induktionsschritt“).*



Der Induktionsschritt sichert also folgende „Kette“ von Implikationen:

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow A(n) \Rightarrow A(n+1) \Rightarrow \ldots$$

Man ist natürlich nicht zwingend auf den Startwert 1 festgelegt. Man kann im Induktionsanfang auch bei einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ starten, muss dann aber auch den Induktionsschritt für $n \geq n_0$ beweisen.

Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 22

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Berechnen Sie: $1+2+3+\cdots+100$.

Trick: Man bildet Paare $1+100,\ 2+99,\ \ldots,\ 50+51$. Das sind 50 Paare mit Summe 101, also 5050.

Vermutung: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion. Anfang: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$. ✓ Schritt: Gilt die Formel für n, so ist

$$1+\cdots+n+(n+1)\overset{\text{IA}}{=}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.\quad\blacksquare$$

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



soll als Neunjähriger so die Aufgabe seines Lehrers gelöst haben, während die Mitschüler noch rechneten.

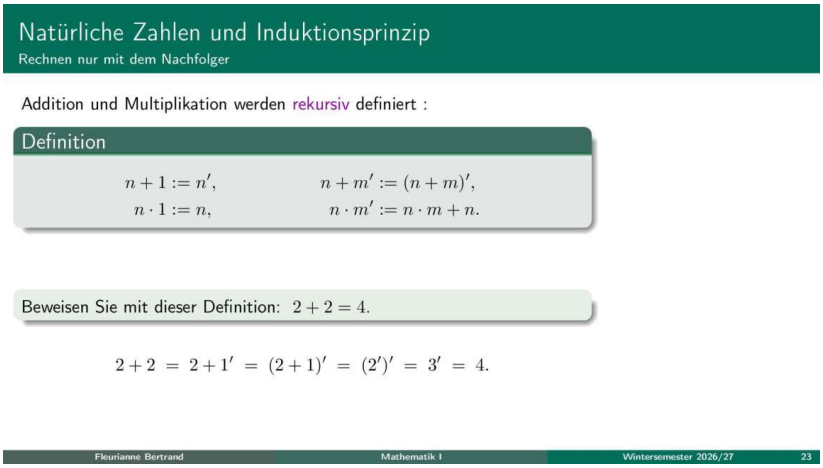
Fleurianne Bertrand | Mathematik I | Wintersemester 2026/27 | 22

Jetzt schauen wir uns ein erstes Beispiel für Induktion an. Berechnen Sie einmal eins plus zwei plus drei und so weiter bis hundert. Die bekannte Geschichte erzählt, dass der junge Gauß diese Aufgabe als Schüler sehr schnell gelöst haben soll, während seine Mitschüler noch gerechnet haben. Auch hier greifen wir wieder ein bisschen vor, denn Addition und sogar das Teilen durch zwei haben wir in unserem axiomatischen Aufbau noch gar nicht definiert. Für die Veranschaulichung der Induktion benutzen wir die vertrauten Rechenoperationen trotzdem schon.

Statt alle Zahlen einzeln zu addieren, paaren wir die erste mit der letzten: eins plus hundert, dann zwei plus neunundneunzig und so weiter bis fünfzig plus einundfünfzig. Jedes dieser Paare ergibt hunderteins, und wir haben fünfzig solcher Paare. Also erhalten wir fünftausendfünfzig. Das löst die konkrete Aufgabe. Aber jetzt fragen wir nicht nur nach hundert, sondern nach einer beliebigen natürlichen Zahl n.

Daraus entsteht die Vermutung: Die Summe der natürlichen Zahlen von eins bis n ist n mal n plus eins, geteilt durch zwei. Wichtig ist: Die Induktion hat uns diese Formel nicht gegeben. Die Idee kommt aus dem Paar-Trick. Die Induktion soll uns jetzt nur noch garantieren, dass die Vermutung für jede natürliche Zahl n stimmt.

Für n gleich eins stimmt die Formel. Links steht eins, und rechts erhalten wir ebenfalls eins. Das ist der Induktionsanfang. Nun nehmen wir an, die Formel gilt für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl n. Das ist die Induktionsvoraussetzung. Für die Summe bis n plus eins nehmen wir die Summe bis n und addieren den neuen letzten Summanden n plus eins. Für die Summe bis n dürfen wir die Induktionsvoraussetzung einsetzen. Nach dem Zusammenfassen erhalten wir genau dieselbe Formel mit n plus eins anstelle von n. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Das Induktionsprinzip sagt uns jetzt: Die Formel gilt für alle natürlichen Zahlen.



Zum Schluss noch die Definition der Rechenoperationen auf Grundlage der Peano-Axiome. Wir haben die natürlichen Zahlen bisher eigentlich nur über eins und den Nachfolger beschrieben. Aber wie kommen wir überhaupt zu Addition und Multiplikation? Auch diese Operationen können wir rekursiv definieren. n plus eins ist der Nachfolger von n. Und wenn wir bereits wissen, was n plus m ist, definieren wir n plus den Nachfolger von m als den Nachfolger von n plus m. Bei der Multiplikation beginnen wir mit n mal eins ist n. Beim nächsten Schritt addieren wir jeweils ein weiteres n. Das wirkt umständlich, ist aber logisch wichtig: Wir setzen die Rechenoperationen nicht einfach voraus, sondern bauen sie aus unserer Grundstruktur auf.

Probieren wir mit diesen Definitionen einmal etwas scheinbar völlig Selbstverständliches: zwei plus zwei ist vier. Versuchen Sie wirklich nur die beiden Rekursionsregeln für die Addition zu benutzen. Denken Sie daran: Zwei ist der Nachfolger von eins. Wie kann ich also das zweite Argument zwei so schreiben, dass unsere Rekursionsregel anwendbar wird?

Wir schreiben zwei als den Nachfolger von eins. Damit ist zwei plus zwei dasselbe wie zwei plus den Nachfolger von eins. Nach der rekursiven Definition ist das der Nachfolger von zwei plus eins. Zwei plus eins ist wiederum der Nachfolger von zwei, also drei. Der Nachfolger von drei ist vier. Damit haben wir tatsächlich allein aus der Definition hergeleitet: zwei plus zwei ist vier. Und damit würde ich für heute Schluss machen, wir haben an den natürlichen Zahlen gesehen, dass hinter etwas sehr Vertrautem doch erstaunlich viel Struktur steckt und nächstes Mal gehen wir noch einmal einen anderen Weg und schauen uns Zahlenkonstruktionen aus Sicht der Mengenlehre an.